অনুশীলনী-4(বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ):

Rana Hamid
Sr.Lecturer in Mathematics.
Mobile:01681717200

সূত্রাবলীঃ

1. Polynomial (বহুপদী):

$Here,\ Poly - Many, Nomial - term$

$Polynomial - Many\ terms$

$Monomial - one\ \ term$

$Binomial - two\ \ terms$

$Trinomial - three\ \ terms$

$Higher\ number\ of\ terms.........$

2. বীজগাণিতিক রাশিঃ এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে (যেমন-x,y,z , $+,-,\times,\div$),ঘাত বা মূল চিহ্নের যে কোন একটি বা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক সৃষ্টি হয় তাকে বীজগাণিতিক রাশি বলে। যেমন- $3x, ax+by$ । ইহা দুই প্রকার, যথা

(i). চলক রাশিঃ যে প্রতীক গাণিতিক প্রক্রিয়ায় একই মান ধারণ করে না অর্থাৎ বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন মান ধারণ করে তাকে চলক রাশি বলে। যেমন- x,y,z... চলক রাশি

(ii). ধ্রুব রাশিঃ যে প্রতীক গাণিতিক প্রক্রিয়ায় একই মানে অবস্থান করে অর্থাৎ মানের কোন পরিবর্তন হয় না তাকে ধ্রুবক বলে।

3. সমীকরণঃ কোনো অজ্ঞাত রাশি বা রাশিমালা যখন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা বা মানের সমান লিখা হয় তখন তাকে সমীকরণ বলে। ইহা দুই প্রকার,যথা-

(i). শর্তযুক্ত সমীকরণ/ শুধু সমীকরণ, $x(x-1)=0$

(ii). অভেদ সমীকরণ, $x(x-1)\equiv x^2-x$

4. বীজ/মূলঃ কোনো সমীকরণের অজ্ঞাত চলকের যে মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হয় অর্থাৎ সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান হয় ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের বীজ বা মূল।

5. সমীকরণের বীজ/মূল সংখ্যাঃ যে সমীকরণের ঘাত সংখা যত তার মূল সংখ্যা তত অর্থাৎ সমীকরণের ঘাত ও মূল সংখ্যা সমান।

6. সমীকরণের ঘাতঃ সমীকরণের প্রতিটি পদের চলকগুলোর ঘাত যোগ করে যে পদে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায় তাকে সমীকরণের ঘাত বলে।

7. বহুপদীঃ এক বা একাধিক অঋনাত্তক পূর্ণ সাংখ্যিক ঘাত ও

ধ্রবকের গুণফল সম্বলিত বীজগনিতীয় রাশিকে বহুপদী বলে। বহুপদী রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকতে পারে।
এক চলকের বহুপদীর সাধারণ আকার,

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+........+a_nx^0$$

উদাহরণঃ

$$p(x)=6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x^1+1.x^0$$
$$=6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$

এখানে, $6x^5\rightarrow$ মুখ্য-পদ এবং

$5x^4+4x^3+3x^2+2x+1\rightarrow$ গৌণ-পদ

এক চলকের বহুপদীর সাধারণ সমীকরণ, $p(x)=0$

$$\therefore a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+........+a_nx^0=0$$

8. দ্বিঘাত সমীকরণঃ কোনো বহুপদী সমীকরণের চলক রাশির

সর্বোচ্চ ঘাত 2 হলে তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে। এক চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শ রূপঃ

$$ax^2+bx+c=0$$

সমাধান: মনে করি, দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ,

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\Rightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac=0$$ [উভয়পক্ষকে 4a দ্বারা গুণ করে পাই]
$$\Rightarrow (2ax)^2+2.2ax.b+b^2-b^2+4ac=0$$
$$\Rightarrow (2ax+b)^2-b^2+4ac=0$$
$$\Rightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac$$
$$\Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$\Rightarrow 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর মূল নির্ণয় করার সুত্র হলোঃ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

9. দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর মুলের প্রকৃতিঃ

i. যদি $b^2-4ac>0$ হয় তবে মূল দুইটি বাস্তব এবং অসমান হবে। **Example:**

$$\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2}=1,-6$$

ii. যদি a,b,c মুলদ এবং $b^2-4ac>0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে তবে মূল দুইটি মুলদ,বাস্তব ও অসমান হবে। **Example:**

$$\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2}=1,-6$$

iii. যদি a,b,c মূলদ এবং $b^2-4ac>0$ এবং b^2-4ac পূর্ণবর্গ না হলে তবে মূল দুইটি অমুলদ,বাস্তব ও অসমান হবে।

Example: $\dfrac{-5\pm\sqrt{7}}{3}$

iv. একটি মূল অমূলদ সংখ্যা $a\pm\sqrt{b}$ হলে অপর মূলটি অনুবন্ধী অমূলদ সংখ্যা $a\mp\sqrt{b}$ হবে।

v. যদি $b^2-4ac=0$ হয় তবে মূল দুইটি বাস্তব, সমান ও মুলদ হবে। **Example:**

$$\frac{-5\pm 0}{2}=\frac{-5+0}{2},\frac{-5-0}{2}=\frac{-5}{2},\frac{-5}{2}$$

vi. যদি $b^2-4ac<0$ হয় তবে মূল দুইটি উভয়ে জটিল সংখ্যা ও অসমান হবে। **Example:**

$$\frac{-5\pm\sqrt{-49}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{i^2.49}}{2}=\frac{-5\pm 7i}{2}$$

vii. একটি মূল জটিল সংখ্যা $a\pm ib$ হলে অপর মূলটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $a\mp ib$ হবে।

10. $ax^2+bx+c=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। এর মূলদ্বয় $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;যেখানে, a,b,c বাস্তব সংখ্যা।

এখানে, $\sqrt{\ }$ এর ভিতরের রাশি b^2-4ac এর মানের উপর ভিত্তি করে মূলদ্বয়ের প্রকৃতি পরিবর্তিত হয়। এর মান পর্যালোচনা করে মূলের প্রকৃতি নিশ্চিতভাবে নিরূপণ করা যায়। এ কারণে একে **নিশ্চায়ক/পৃথায়ক** বলে।

$\therefore ax^2+bx+c=0$ এর পৃথায়ক b^2-4ac

উদাহরণঃ $x^2-x-6=1.x^2+(-1).x+(-6)$

রাশিটির পৃথায়ক $=(-1)^2-4.1.(-6)=1+24=25$

11. দুইটা মূল নিয়ে সমীকরণ গঠন : মনে করি, α এবং β দুইটা মূল। **সুতরাং**

$$x=\alpha,\beta$$
$$\Rightarrow x=\alpha, x=\beta$$
$$\Rightarrow x-\alpha=0, x-\beta=0$$
$$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=0$$
$$\Rightarrow x^2-\beta x-\alpha x+\alpha\beta=0$$
$$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

$\therefore$ **দুইটা মূল নিয়ে সমীকরণ গঠন করার সুত্র,**

x^2 - (মুলদ্বয়ের যোগফল) x +মুলদ্বয়ের গুনফল=0

$$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

12. দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর মুল এবং সহগের মধ্যে সম্পর্কঃ

আমরা জানি,

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\therefore x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=0$$

অতএব, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ এবং $x^2-(-\dfrac{b}{a})x+\dfrac{c}{a}=0$ সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

OR, মনে করি, α এবং β দুইটা মূল। **সুতরাং**

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2b}{2a}$$
$$\therefore \alpha+\beta=\frac{-b}{a}$$

এবং

$$\alpha\beta=(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$$
$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$
$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$
$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$
$$=\frac{4ac}{4a^2}$$
$$\therefore \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α, β হয় তবে,

মুলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\beta=-x$ এর সহগ/ x^2 এর সহগ,

$$\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

এবং মুলদ্বয়ের গুনফল, $\alpha\beta=$ধ্রবপদ / x^2 এর সহগ

$$\therefore \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

13. যদি $ax^3+bx^2+cx+d=0$ সমীকরণের মুলত্রয় α, β, γ হয় তবে,

$\alpha+\beta+\gamma=-x^2$ এর সহগ/ x^3 এর সহগ ,

$$\therefore \sum\alpha=\sum\beta=\sum\gamma=\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

এবং $\sum\alpha\beta=\sum\beta\gamma=\sum\gamma\alpha=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$=x$ এর সহগ/ x^3 এর সহগ

$$\therefore \sum\alpha\beta=\sum\beta\gamma=\sum\gamma\alpha=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

এবং $\alpha\beta\gamma=$ - ধ্রবপদ / x^3 এর সহগ

$$\therefore \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

14. তিনটা মূল নিয়ে সমীকরণ গঠন করার নিয়মঃ

x^3-(মুলত্রয়ের যোগফল) x^2+ (দুইটা করে মূল নিয়ে তাদের গুনফলের যোগফল) x - মুলত্রয়ের গুনফল $=0$

$$\therefore x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

15. $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ সমীকরণের সাধারণ মূল থাকার শর্তঃ

সমাধানঃ মনে করি, $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ সমীকরণের একটি সাধারন মূল α হলে,

$$a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1=0.................(i)$$

$$a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2=0...................(ii)$$

সমীকরণের (i) এবং (ii) নং হতে বজ্রগুণনের নিয়মানুসারে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\alpha}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\alpha}{c_1a_2-c_2a_1}$$ এবং

$$\frac{\alpha}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{c_1a_2-c_2a_1}$$ এবং

$$\alpha=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore \alpha=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{c_1a_2-c_2a_1}$$ এবং $$\alpha=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

শর্তমতে, $$\frac{b_1c_2-b_2c_1}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore (c_1a_2-c_2a_1)^2=(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)$$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

16. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

17. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

18. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

19. $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$

$$\therefore a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$$

20. $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

$$\therefore ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$$

$$\therefore ab=(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{a-b}{2})^2$$

21. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore 2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

22. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

23. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

24. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

25. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

26. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

27. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

28. যখন মূলগুলি সমান্তর প্রগমনে থাকে,

i. ত্রিঘাত সমীকরণের জন্য মূলগুলি হবে,

$a-d, a, a+d$

ii. চতুর্ঘাত সমীকরণের জন্য মূলগুলি হবে,

$a-3d, a-d, a+d, a+3d$

29. যখন মূলগুলি গুণোত্তর প্রগমনে থাকে,

i. ত্রিঘাত সমীকরণের জন্য মূলগুলি হবে, $\frac{a}{r}, a, ar$

ii. চতুর্ঘাত সমীকরণের জন্য মূলগুলি হবে,

$\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

অনুশীলনী-4(বহুপদী)

*****1(i).** $ax^2+bx+c=0$ এর মূলের প্রকৃতি আলোচনা কর। **(D-17)**

(ii). উদাহরণসহ নিশ্চায়কের সংজ্ঞা দাও। **(B-17)**

(iii). $x^2+bx+c=0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। **(Ch-17)**

(iv). $p=q=1$ হলে $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ এর সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। **(All-18)**

(v). $4x^2+2x-1=0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। **(B-19)**

(vi). $m=0, n=q=r=1$ হলে $P(x)=mx^3+nx^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। **(Dj-19)**

(vii). $z=-2+2i$ হলে $\bar{z}=(a^2+2)+ib$ সমীকরণটির মূল a এবং b এর প্রকৃতি নিরূপণ কর। **(C-19)**

(viii). উৎপাদকের সাহায্যে $2x^2+5x-9=0$ সমীকরণটি সমাধান কর। **(Dj-17)**

(ix). $\frac{x^3-8}{x-2}$ বহুপদীর ঘাত নির্ণয় কর। **(C-17)**

*****2(i).** k-এর মান কত হলে $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব এবং সমান হবে?

(ii). m এর মান কত হলে, $(m-1)x^2-(m+2)x+4=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে? **(R-19)**

(iii). $x^2-2mx+8m-15=0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে m এর মান কত? **(J-19)**

(iv). k-এর মান কত হলে $(k^2-3)x^2+3kx+(3k+1)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উলটা হবে? অতঃপর সমীকরণের মূলদ্বয়ের ধর্ম নির্ণয় কর।

(v). k-এর মান কত হলে $(3k+1)x^2-(k+11)x+9=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে?

(i). সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণ,

$(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$

$\therefore (k-1)x^2+\{-(k+2)\}x+4=0$

যা $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a=k-1, b=-(k+2), c=4$

এখানে, নিশ্চায়ক $=b^2-4ac$

$=\{-(k+2)\}^2-4(k-1).4$

$=(k^2+2.k.2+2^2)-16(k-1)$

$=k^2+4k+4-16k+16$

$=k^2-12k+20$

শর্তমতে, $k^2-12k+20=0$

$\Rightarrow k^2-10k-2k+20=0$

$\Rightarrow k(k-10)-2(k-10)=0$

$\therefore (k-10)(k-2)=0$

$\therefore$ **হয়,** $(k-10)=0$

$\therefore k=10$

অথবা, $(k-2)=0$

$\therefore k=2$

$\therefore$ **k**-এর মান 10,2 হলে মূলগুলি বাস্তব এবং সমান হবে।

3(i). K এর মান কত হলে

$(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3$ রাশিটি একটি পুর্ণবর্গ হবে?

(ii). দেখাও যে, $(h^2-a^2)x^2-2hkx+2k+3$ রাশিটি একটি পুর্ণবর্গ হবে যদি $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$ হয়।

(i). সমাধানঃ $(h^2-a^2)x^2-2hkx+(k^2-b^2)$ রাশিটি পুর্ণবর্গ হবে যদি

$(h^2-a^2)x^2-2hkx+(k^2-b^2)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।

$\therefore$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক

$=(-2hk)^2-4(h^2-a^2)(k^2-b^2)$

$=4h^2k^2-4(h^2k^2-h^2b^2-a^2k^2+a^2b^2)$

$=4h^2k^2-4h^2k^2+4h^2b^2+4a^2k^2-4a^2b^2$

$=4h^2b^2+4a^2k^2-4a^2b^2$

শর্তমতে, $4h^2b^2+4a^2k^2-4a^2b^2=0$

$\Rightarrow 4h^2b^2+4a^2k^2=4a^2b^2$

$\Rightarrow 4(h^2b^2+a^2k^2)=4a^2b^2$

$\Rightarrow h^2b^2+a^2k^2=a^2b^2$

$\Rightarrow \frac{h^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2k^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

$\therefore \frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$ **(Proved)**