1(i). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}\log x & \log y & \log z\\ \log 2x & \log 2y & \log 2z\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}=0$$

(i). সমাধানঃ

$$L.H.S=\begin{vmatrix}\log x & \log y & \log z\\ \log 2x & \log 2y & \log 2z\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\log x & \log y & \log z\\ \log 2x-\log x & \log 2y-\log y & \log 2z-\log z\\ \log 3x-\log 2x & \log 3y-\log 2y & \log 3z-\log 2z\end{vmatrix}$$

$[r_2{}'=r_2-r_1, r_3{}'=r_3-r_2]$

$$=\begin{vmatrix}\log x & \log y & \log z\\ \log\frac{2x}{x} & \log\frac{2y}{y} & \log\frac{2z}{z}\\ \log\frac{3x}{2x} & \log\frac{3y}{2y} & \log\frac{3z}{2z}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\log x & \log y & \log z\\ \log 2 & \log 2 & \log 2\\ \log\frac{3}{2} & \log\frac{3}{2} & \log\frac{3}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\log 2.\log\frac{3}{2}.\begin{vmatrix}\log x & \log y & \log z\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\log 2.\log\frac{3}{2}\times 0$$

$=0$

$=R.H.S$

2(i). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}a & b & ax+by\\ b & c & bx+cy\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}=-(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$$

(ii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}1+a^2-b^2 & 2ab & -2b\\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a\\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}=(1+a^2+b^2)^3$$

(iii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & a^2\\ b^2 & (c+a)^2 & b^2\\ c^2 & c^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3.$$

(iv). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}b^2+c^2 & ab & ca\\ ab & c^2+a^2 & bc\\ ca & bc & a^2+b^2\end{vmatrix}=4a^2b^2c^2$$

(i). সমাধানঃ

$$L.H.S=\begin{vmatrix}a & b & ax+by\\ b & c & bx+cy\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix}ax & by & ax+by\\ bx & cy & bx+cy\\ ax^2+bxy & bxy+cy^2 & 0\end{vmatrix}$$

$[c_1{}'=c_1\times x,, c_2{}'=c_2\times y]$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix}ax & by & ax+by-(ax+by)\\ bx & cy & bx+cy-(bx+cy)\\ ax^2+bxy & bxy+cy^2 & 0-(ax^2+bxy+bxy+cy^2)\end{vmatrix}$$

$[c_3{}'=c_3-(c_1+c_2)]$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix}ax & by & 0\\ bx & cy & 0\\ ax^2+bxy & bxy+cy^2 & -(ax^2+2bxy+cy^2)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xy}\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}\begin{vmatrix}ax & by\\ bx & cy\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xy}\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}(acxy-b^2xy)$$

$$=\frac{1}{xy}\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}.xy.(ac-b^2)$$

$$=-(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$$

$$=(ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac)$$

$$=R.H.S$$

(ii). সমাধানঃ

$$L.H.S=\begin{vmatrix}1+a^2-b^2 & 2ab & -2b\\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a\\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b\\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a\\ 2b-b(1-a^2-b^2) & -2a+a(1-a^2-b^2) & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$[c_1{}' = c_1 - bc_3, c_2{}' = c_2 + ac_3]$

$$=\begin{vmatrix}1+a^2+b^2 & 0 & -2b\\ 0 & 1+b^2+a^2 & 2a\\ (2b-b+a^2b+b^3) & (-2a+a-a^3-ab^2) & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a^2+b^2 & 0 & -2b\\ 0 & 1+b^2+a^2 & 2a\\ (b+a^2b+b^3) & (-a-a^3-ab^2) & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a^2+b^2 & 0 & -2b\\ 0 & 1+b^2+a^2 & 2a\\ b(1+a^2+b^2) & -a\,(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & -2b\\ 0 & 1 & 2a\\ b & -a & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & -2b+2b\\ 0 & 1 & 2a+0\\ b & -a & 1-a^2-b^2+2b^2\end{vmatrix}$$

$[c_3{}' = c_3 + 2bc_1]$

$$=(1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2a\\ b & -a & 1-a^2+b^2\end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2.1.\begin{vmatrix}1 & 2a\\ -a & 1-a^2+b^2\end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2\{(1-a^2+b^2)-(-2a^2)\}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2(1-a^2+b^2+2a^2)$$

$$=(1+a^2+b^2)^2(1+a^2+b^2)$$

$$=(1+a^2+b^2)^3$$

$$=R.H.S$$

(iii). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & a^2\\ b^2 & (c+a)^2 & b^2\\ c^2 & c^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2\\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & b^2-b^2\\ c^2 & c^2-c^2 & (a+b)^2-c^2\end{vmatrix}$$

$[c_2{}' = c_2 - c_1,, c_3{}' = c_3 - c_1]$

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\} & \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}\\ b^2 & \{(c+a)+b\}\{(c+a)-b\} & 0\\ c^2 & 0 & \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c)\\ b^2 & (c+a+b)\,(c+a-b) & 0\\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}(b+c)^2 & (a-b-c) & (a-b-c)\\ b^2 & (c+a-b) & 0\\ c^2 & 0 & (a+b-c)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}(b+c)^2-b^2-c^2 & (a-b-c)-(c+a-b)-0 & (a-b-c)-0-(a+b-c)\\ b^2 & (c+a-b) & 0\\ c^2 & 0 & (a+b-c)\end{vmatrix}$$

$[r_1{}' = r_1 - r_2 - r_3]$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}b^2+2bc+c^2-b^2-c^2 & (a-b-c-c-a+b) & (a-b-c-a-b+c)\\ b^2 & (c+a-b) & 0\\ c^2 & 0 & (a+b-c)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}2bc & -2c & -2b\\ b^2 & (c+a-b) & 0\\ c^2 & 0 & (a+b-c)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{bc}\begin{vmatrix}2bc & -2bc & -2bc\\ b^2 & b(c+a-b) & 0\\ c^2 & 0 & c(a+b-c)\end{vmatrix}$$

$[c_2{}' = c_2 \times b, c_3{}' = c_3 \times c]$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{bc}.2bc.bc.\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ b & c+a-b & 0\\ c & 0 & a+b-c\end{vmatrix}$$

$$=2bc.(a+b+c)^2\begin{vmatrix}1 & -1+1 & -1+1\\ b & c+a-b+b & 0+b\\ c & 0+c & a+b-c+c\end{vmatrix}$$

$[c_2{}' = c_2 + c_1,, c_3{}' = c_3 + c_1]$

$$=2bc.(a+b+c)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & c+a & b\\ c & c & a+b\end{vmatrix}$$

$$=2bc.(a+b+c)^2.1.\begin{vmatrix}c+a & b\\ c & a+b\end{vmatrix}$$

$$=2bc(a+b+c)^2(ca+bc+a^2+ab-bc)$$

$$=2bc(a+b+c)^2(ca+a^2+ab)$$

$$=2bc(a+b+c)^2.a.(c+a+b)$$

$$=2abc(a+b+c)^2(a+b+c)$$

$$=2abc(a+b+c)^3$$

$$=R.H.S$$

(iv). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}b^2+c^2 & ab & ca\\ ab & c^2+a^2 & bc\\ ca & bc & a^2+b^2\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a(b^2+c^2) & a^2b & ca^2\\ ab^2 & b(c^2+a^2) & b^2c\\ c^2a & bc^2 & c(a^2+b^2)\end{vmatrix}$$

$[r_1{}' = r_1 \times a,, r_2{}' = r_2 \times b,, r_3{}' = r_3 \times c]$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}ab^2+c^2a & a^2b & ca^2\\ ab^2 & bc^2+a^2b & b^2c\\ c^2a & bc^2 & ca^2+b^2c\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}ab^2+c^2a-ab^2-c^2a & a^2b-bc^2-a^2b-bc^2 & ca^2-b^2c-ca^2-b^2c\\ ab^2 & bc^2+a^2b & b^2c\\ c^2a & bc^2 & ca^2+b^2c\end{vmatrix}[r_1{}' = r_1 - r_2 - r_3]$$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}0 & -2bc^2 & -2b^2c\\ ab^2 & bc^2+a^2b & b^2c\\ c^2a & bc^2 & ca^2+b^2c\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abc}(-2bc)\begin{vmatrix}0 & c & b\\ ab^2 & bc^2+a^2b & b^2c\\ c^2a & bc^2 & ca^2+b^2c\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abc}(-2bc).bc\begin{vmatrix}0 & c & b\\ ab & c^2+a^2 & bc\\ ca & bc & a^2+b^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-2bc}{a}.\frac{1}{bc}\begin{vmatrix}0 & bc & bc\\ ab & bc^2+a^2b & bc^2\\ ca & b^2c & ca^2+b^2c\end{vmatrix}$$

$[c_2{}' = c_2 \times b,, c_3{}' = c_3 \times c]$

$$=\frac{-2bc}{a}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ ab & bc^2+a^2b & bc^2\\ ca & b^2c & ca^2+b^2c\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-2bc}{a}\begin{vmatrix}0 & 1-1 & 1\\ ab & bc^2+a^2b-bc^2 & bc^2\\ ca & b^2c-ca^2-b^2c & ca^2+b^2c\end{vmatrix}[c_2{}' = c_2 - c_3]$$

$$=\frac{-2bc}{a}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ ab & a^2b & bc^2\\ ca & -ca^2 & ca^2+b^2c\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-2bc}{a}.1.\begin{vmatrix}ab & a^2b\\ ca & -ca^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-2bc}{a}(-a^3bc-a^3bc)$$

$$= \frac{-2bc}{a}(-2a^3bc)$$
$$= -2bc(-2a^2bc)$$
$$= 4a^2b^2c^2$$
$$= R.H.S$$