4(i). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&p&p^2\\1&p^2&p^4\end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1).$$

(ii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(iii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

(iv). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}a+x&b+x&c+x\\a+y&b+y&c+y\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y).$$

(v). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}\log x&\log y&\log z\\\log 2x&\log 2y&\log 2z\\\log 3x&\log 3y&\log 3z\end{vmatrix} = 0$$

(vi). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}(b+c)^2&a^2&1\\(c+a)^2&b^2&1\\(a+b)^2&c^2&1\end{vmatrix} = -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

(i). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix}1&1&1\\1&p&p^2\\1&p^2&p^4\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}1&1-1&1-1\\1&p-1&p^2-p\\1&p^2-1&p^4-p^2\end{vmatrix} [c_2' = c_2 - c_1,, c_3' = c_3 - c_2]$$

$$= \begin{vmatrix}1&0&0\\1&p-1&p^2-p\\1&p^2-1&p^4-p^2\end{vmatrix}$$

$$= 1.\begin{vmatrix}p-1&p^2-p\\p^2-1&p^4-p^2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}p-1&p(p-1)\\(p^2-1)&p^2(p^2-1)\end{vmatrix}$$

$$= (p-1)(p^2-1)\begin{vmatrix}1&p\\1&p^2\end{vmatrix}$$

$$= (p-1)(p^2-1)(p^2-p)$$

$$= (p-1)(p^2-1).p(p-1)$$

$$= p(p-1)^2(p^2-1)$$

$$= R.H.S$$

(ii). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}1-1&1-1&1\\(a-b)&(b-c)&c\\(a^3-b^3)&(b^3-c^3)&c^3\end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2,, c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= \begin{vmatrix}0&0&1\\(a-b)&(b-c)&c\\(a-b)(a^2+ab+b^2)&(b-c)(b^2+bc+c^2)&c^2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}(a-b)&(b-c)\\(a-b)(a^2+ab+b^2)&(b-c)(b^2+bc+c^2)\end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1&1\\(a^2+ab+b^2)&(b^2+bc+c^2)\end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\{(b^2+bc+c^2)-(a^2+ab+b^2)\}$$

$$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$$

$$= (a-b)(b-c)(bc+c^2-a^2-ab)$$

$$= (a-b)(b-c)(c^2-a^2+bc-ab)$$

$$= (a-b)(b-c)\{(c+a)(c-a)+b(c-a)\}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(c+a+b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

$$= R.H.S$$

(iii). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ (a-b) & (b-c) & c \\ (a^2-b^2) & (b^2-c^2) & c^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2,, c_2' = c_2 - c_3]$

$= abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (a-b) & (b-c) & c \\ (a+b)(a-b) & (b+c)\ (b-c) & c^2 \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} (a-b) & (b-c) \\ (a+b)(a-b) & (b+c)\ (b-c) \end{vmatrix}$

$= abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a+b) & (b+c) \end{vmatrix}$

$= abc(a-b)(b-c)\{(b+c)-(a-b)\}$

$= abc(a-b)(b-c)(b+c-a+b)$

$= abc(a-b)(b-c)(c-a)$

$= R.H.S$

(iv). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+x-b-x & b+x-c-x & c+x \\ a+y-b-y & b+y-c-y & c+y \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2,, c_2' = c_2 - c_3]$

$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c+x \\ a-b & b-c & c+y \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c+x \\ a-b & b-c & c+y \\ (a-b)(a+b) & (b-c)(b+c) & c^2 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ (a+b) & (b+c) & c^2 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & c+x-c-y \\ 1 & 1 & c+y \\ (a+b) & (b+c) & c^2 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-y \\ 1 & 1 & c+y \\ (a+b) & (b+c) & c^2 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(x-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a+b) & (b+c) \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(x-y)\{(b+c)-(a+b)\}$

$= (a-b)(b-c)(x-y)(b+c-a-b)$

$= (a-b)(b-c)(x-y)(c-a)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$

$= R.H.S$

(v). সমাধানঃ

$L.H.S = \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x - \log x & \log 2y - \log y & \log 2z - \log z \\ \log 3x - \log 2x & \log 3y - \log 2y & \log 3z - \log 2z \end{vmatrix}$

$[r_2' = r_2 - r_1, r_3' = r_3 - r_2]$

$= \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log \frac{2x}{x} & \log \frac{2y}{y} & \log \frac{2z}{z} \\ \log \frac{3x}{2x} & \log \frac{3y}{2y} & \log \frac{3z}{2z} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2 & \log 2 & \log 2 \\ \log \frac{3}{2} & \log \frac{3}{2} & \log \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \log 2.\log \frac{3}{2}.\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \log 2.\log \frac{3}{2} \times 0$$

$$= 0$$

$$= R.H.S$$

(v). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 - b^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 - c^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2]$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & a^2 & 1 \\ (c+a+b)(c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} (b+c-a) & a^2 & 1 \\ (c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} (b+c-a)-(c+a-b) & a^2-b^2 & 1-1 \\ (c+a-b)-(a+b-c) & b^2-c^2 & 1-1 \\ (a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2,, r_2' = r_2 - r_3]$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} (b+c-a-c-a+b) & (a+b)(a-b) & 0 \\ (c+a-b-a-b+c) & (b+c)(b-c) & 0 \\ (a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} (2b-2a) & (a+b)(a-b) & 0 \\ (2c-2b) & (b+c)(b-c) & 0 \\ (a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} (2b-2a) & (a+b)(a-b) \\ (2c-2b) & (b+c)(b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & (a+b)(a-b) \\ -2(b-c) & (b+c)(b-c) \end{vmatrix}$$

$$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & (a+b) \\ 1 & (b+c) \end{vmatrix}$$

$$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)\{(b+c)-(a+b)\}$$

$$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$$

$$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$= R.H.S$$