Rana Hamid
Sr. Lecturer in Mathematics.
Mobile: 01681-717200

অনুশীলনী-1.1(ম্যাট্রিক্স):

ইংরেজ গণিতবিদ **“James Joseph Sylvester”1850** খ্রিষ্টাব্দে সর্বপ্রথম ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে ধারনা ব্যক্ত করেন যা ল্যাটিন শব্দ **“Matter(Mother)”** থেকে নেওয়া হয়েছে। পরে তারই সহকর্মী **“Arthur cayley” 1853** খ্রিষ্টাব্দে বিপরীত ম্যাট্রিক্সের ধারণাসহ ম্যাট্রিক্সের তাৎপর্য তুলে ধরেন এবং পরবর্তীতে **1858** খ্রিষ্টাব্দে তার পত্রিকা **“Memoir on the theory of matrices”** এ প্রথমে ম্যাট্রিক্সকে বিশ্লেষণমুলকভাবে প্রকাশ করেন। এ কারনে **Arthur cayley** -কে ম্যাট্রিক্সের জনক বলা হয়। ব্রিটিশ গণিতবিদ **Arthur cayley** -ই প্রথম ম্যাট্রিক্স আবিষ্কার করেন। বিখ্যাত পদার্থ বিজ্ঞানী হাইজেন বার্গ **1925** খ্রিষ্টাব্দে কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় প্রথম ম্যাট্রিক্সের ব্যবহার শুরু করেন। এছাড়া **Leibniz (1646-1716), Hamilton (1805-1865), Jordan (1842-1899), Jacobi (1804-1851)** ম্যাট্রিক্স সম্পর্কিত তত্ত্বগুলি বিস্তারিত ব্যাখ্যা করেন। তিনটি চলকের তিনটি সরল সমীকরণের সমাধান সূত্র হিসেবে গণিতে নির্ণায়কের আবির্ভাব ঘটে।খ্রিষ্টপূর্ব ৩য় শতাব্দীতে চীনদেশীয় গণিতবিদদের রচিত ”The Nine chapters on the Mathematical Art” বইতে সর্বপ্রথম নির্ণায়ক ব্যবহৃত হয়। ইউরোপে গণিতবিদ Cardano ষোড়শ শতকের শেষের দিকে নির্ণায়ক ব্যবহার করেন। **1683** খ্রিষ্টাব্দে প্রথম জাপানি গণিতবিদ **“Seki”** নির্ণায়ক বিষয়ক প্রাথমিক ধারনা প্রকাশ করেন। তিনি ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক নিরুপন করেন এবং সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ে নির্ণায়কের ব্যবহার প্রসঙ্গে ধারনা দেন। **1693** খ্রিষ্টাব্দে গনিতবিদ লিবনিজ সরল সমীকরণ মালার সমাধানে এক বিশেষ সম্পর্কের অবতারণা করেন। পরে **1750** খ্রিষ্টাব্দে সুইস গণিতবিদ গ্যাব্রিয়েল ক্রেমার নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাতিক সমীকরণ জোটের সমাধান করেন। উনবিংশ শতাব্দীতে গাউজ **(Gauss,1777-1855)** এবং কচি **(Cauchy,1789-1857)** এ সম্পর্কে আরও সুস্পষ্ট ধারনা দেন। সর্বপ্রথম কচি **1812** খ্রিষ্টাব্দে এ ধরনের গানিতিক ফাংশনের নাম দেন নির্ণায়ক। গণিতে সমীকরণজোটের সমাধান,পরিসংখ্যানের সম্ভাবনা তত্তে ,উচ্চতর অর্থনীতিতে, ব্যবসায় গণিতে, আয়ব্যয় হিসাব ইত্যাদিতে ম্যাট্রিক্স বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়। এছাড়া শেয়ারের ক্রয় বিক্রয় হিসাব, কোণ প্রকার ট্রেজারি বন্ডে কি পরিমাণ অর্থ বিনিয়োগ করতে হবে তা বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সহজে নির্ণয় করা যায়।

সংজ্ঞাঃ

1. **সারিঃ** ম্যাট্রিক্সের বাম থেকে ডানের ভুক্তিগুলি নিয়ে সারি গঠিত হয়।
2. **কলামঃ** ম্যাট্রিক্সের উপর থেকে নীচ ভুক্তিগুলি নিয়ে কলাম/স্তম্ভ গঠিত হয়।
3. **ম্যাট্রিক্সঃ** কতগুলো সংখ্যাকে সারি ও কলাম আকারে সাজানোর ফলে যে আয়তাকার বা বর্গাকার বিন্যাস পাওয়া যায়,তাকে ম্যাট্রিক্স বলে। ইহাকে তৃতীয় বন্ধনী ’[ ]’ বা, প্রথম বন্ধনী ‘( )’ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কখনও কখনও ‘‖ ‖’ দ্বারা প্রকাশ করা হয়ে থাকে।

অথবা, বিজ্ঞান ও গণিতের বিভিন্ন তথ্য আয়তাকারে সারি ও কলাম বরাবর সাজালে যে আয়তাকার বা বর্গাকার বিন্যাস পাওয়া যায়, তাকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়। ইহাকে তৃতীয় বন্ধনী ’[ ]’ বা, প্রথম বন্ধনী ‘( )’ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কখনও কখনও ‘‖ ‖’ দ্বারা প্রকাশ করা হয়ে থাকে।

যেমনঃ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Note: ম্যাট্রিক্স মূলত কোন সংখ্যা নয় এবং এর কোন মান নেই। এটি কার্যকারক (Operator) হিসাবে কাজ করে। **যেমনঃ** $[4]$ একটি ম্যাট্রিক্স কিন্তু $[4]\neq 4$

4. **ভুক্তিঃ** যে সংখ্যা বা রাশি নিয়ে ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় তাদেরকে ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি বলা হয়।
5. **ম্যাট্রিক্সের Order/ক্রম/মাত্রা/পর্যায়ঃ** m সংখ্যক সারি এবং n সংখ্যক কলাম বিশিষ্ট কোন ম্যাট্রিক্স কে $m\times n$ অর্থাৎ m by n ক্রমের ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

   যেমনঃ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$
6. **আয়তাকার ম্যাট্রিক্সঃ** যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান নয় তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে।

   যেমনঃ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$
7. **বর্গ ম্যাট্রিক্সঃ** যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে।

   যেমনঃ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
8. **সারি ম্যাট্রিক্সঃ** যে ম্যাট্রিক্সের কেবল একটি সারি বিদ্যমান তাকে সারি ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

   যেমনঃ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$

R.H.Sir

9. কলাম ম্যাট্রিক্সঃ যে ম্যাট্রিক্সের কেবল একটি কলাম বিদ্যমান তাকে কলাম ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমনঃ $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}$

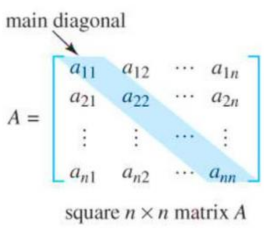
10. আনুভূমিক ম্যাট্রিক্সঃ যে ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা অপেক্ষা কলাম সংখ্যা অধিক থাকে, তাকে আনুভূমিক ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

11. উলম্ব ম্যাট্রিক্সঃ যে ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা অপেক্ষা সারি সংখ্যা অধিক থাকে, তাকে উলম্ব ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

12. মুখ্য কর্ণঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি ও ১ম কলামে অবস্থিত সাধারণ ভুক্তিগামি কর্ণকে মুখ্য কর্ণ বলা হয়। **যেমনঃ**



13. মাধ্যমিক কর্ণঃ উপরের ডান দিকের ভুক্তিগুলি থেকে নিম্নের বাম দিকের ভুক্তিগুলি বরাবর চলমান বর্গাকার ম্যাট্রিক্সকে মাধ্যমিক কর্ণ বলা হয়। **যেমনঃ**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

14. ম্যাট্রিক্সের ট্রেসঃ কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের উপাদানগুলির যোগফলকে ম্যাট্রিক্সের ট্রেস বলা হয়।

যেমনঃ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের

ট্রেস হলঃ $1+6+5=12$

15. ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্সঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের নীচের অথবা, উপরের সবগুলি ভুক্তিই শুন্য তাকে ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্স বলে। **যেমনঃ**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

এবং

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

16. উর্ধ্ব ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্সঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের নীচের সবগুলি ভুক্তি শুন্য হলে, তাকে **উর্ধ্ব**ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্স বলে।**যেমনঃ**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

17. নিম্ন ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্সঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের উপরের সবগুলি ভুক্তি শুন্য হলে, তাকে নিম্ন ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্স বলে। **যেমনঃ**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

18. কর্ণ ম্যাট্রিক্সঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলি ছাড়া অবশিষ্ট সব ভুক্তিগুলি শুন্য হলে, তাকে কর্ণ মাত্রিক্স বলে।

যেমনঃ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

এটাকে লেখা যায়, $diag(a_{11}, a_{22}, a_{33})$

19. স্কেলার ম্যাট্রিক্সঃ যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলি সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়। **যেমনঃ**

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

20. Identity/unit/ একক/ অভেদক ম্যাট্রিক্সঃ স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলির প্রত্যেকটি একক হলে তাকে একক/অভেদক/ইউনিট বলে। ইহাকে "I " দ্বারা প্রকাশ করা হয়। **যেমনঃ**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

এখানে,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21. শূন্য ম্যাট্রিক্সঃ কোন ম্যাট্রিক্সের সকল ভুক্তি শুন্য হলে তাকে শুন্য ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমনঃ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22. উপ-ম্যাট্রিক্সঃ কোনো একটি ম্যাট্রিক্সের যেকোনো সংখ্যক কলাম ও সারির ভুক্তি বাদ দিয়ে গঠিত অপর একটি ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} ..etc$$

23. রূপান্তরিত/ বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose matrix): কোন ম্যাট্রিক্সের সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। ইহাকে " A^T / A' " দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

24. প্রতিসম ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^T = A$ হয়, অর্থাৎ $A_{ij} = A_{ji}$

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^T = A$$

25. অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^T = -A$ হয়, অর্থাৎ $A_{ij} = -A_{ji}$

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^T = -\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^T = -A$$

26. জটিল ম্যাট্রিক্সঃ যে ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলোর মধ্যে জটিল সংখ্যা থাকে তাকে জটিল ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ i & 5 \end{bmatrix}$ একটি জটিল ম্যাট্রিক্স।

27. অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সঃ যে কোন ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি সমূহ জটিল সংখ্যা হলে প্রত্যেক জটিল সংখ্যার পরিবর্তে তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বসিয়ে এবং অন্যান্য উপাদান স্ব স্ব স্থানে অপরিবর্তিত রেখে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5+i \\ 2+i & -i \end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5-i \\ 2-i & i \end{bmatrix}$$

28. হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $(\overline{A})^T = A$ হয়,

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 7 & 5+2i \\ 5-2i & 5 \end{bmatrix}$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5-2i \\ 5+2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 7 & 5+2i \\ 5-2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\overline{A})^T = A$$

29. বিহারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে বিহারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $(\overline{A})^T = -A$ হয়,

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{A})^T = -\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\overline{A})^T = -A$$

30. শূন্যঘাতি/অক্ষম/বিনাশক ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^n = 0$ হয়,

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

31. সমঘাতি/ একক্ষম ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2 = A$ হয়,

R.H. Sir

যেমনঃ $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

32. অভেদঘাতি/উদঘাতিক ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2=I$ হয়,

যেমনঃ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

33. পর্যায়বৃত্ত ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে পর্যায়বৃত্ত ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^{k+1}=A$ হয়। যেখানে, A হলো পর্যায়বৃত্ত ম্যাট্রিক্স ও k পর্যায়কাল।

যেমনঃ $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 2 & -3\end{bmatrix}$,

$A^2=\begin{bmatrix}-5 & -6 & -6\\ 9 & 10 & 9\\ -4 & -4 & -3\end{bmatrix}$,

$A^3=\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 2 & -3\end{bmatrix}$

$\therefore A^{2+1}=A$

$\therefore$ A একটি পর্যায়বৃত্ত ম্যাট্রিক্স যার পর্যায়কাল=2

34. লম্ব ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে লম্ব ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^T.A=A.A^T=I$ হয়।

যেমনঃ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

35. সমান ম্যাট্রিক্সঃ যদি দুইটি ম্যাট্রিক্সের ক্রম/আকার ও অনুরূপ ভুক্তিগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে ম্যাট্রিক্স দুইটিকে সমান ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমনঃ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ এবং

$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ দুইটি ম্যাট্রিক্স।

36. ম্যাট্রিক্সের যোগ/ বিয়োগ করার নিয়মঃ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা সব সময় সমান হতে হবে অর্থাৎ একই রকম উপাদান গুলো যোগ-বিয়োগ হয়।

37. ম্যাট্রিক্সের গুণ করার নিয়মঃ ২য় ম্যাট্রিক্সের ১ম কলাম দিয়ে ১ম ম্যাট্রিক্সের সকল সারিকে গুণ করে যোগ করতে হবে। অনুরূপভাবে, ২য় ম্যাট্রিক্সের ২য়,৩য় কলাম দিয়ে ১ম ম্যাট্রিক্সের সকল সারিকে গুণ করে যোগ করতে হবে।

অথবা,

ম্যাট্রিক্সের গুণ করার নিয়মঃ ১ম ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি দিয়ে ২য় ম্যাট্রিক্সের সকল কলামকে গুণ করে যোগ করতে হবে। অনুরূপভাবে, ১ম ম্যাট্রিক্সের ২য়,৩য় সারি দিয়ে ২য় ম্যাট্রিক্সের সকল কলামকে গুণ করে যোগ করতে হবে।

বিঃদ্রঃ ম্যাট্রিক্সের গুণ তখনই সম্ভব যখন ১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা (১ম ম্যাট্রিক্সের সারির উপাদান সংখ্যা) ২য় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার (২য় ম্যাট্রিক্সের কলামের উপাদান সংখ্যা) সমান হয়।

অনুশীলনী-1.1

Shortcut Technic-01: AB নির্ণয়যোগ্য **(১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ২য় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সমান)** হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম/মাত্রা=A ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা $\times$ B ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা।

যেমনঃ A ও B ম্যাট্রিক্সের ক্রম যথাক্রমে $m\times p$ এবং $p\times n$ হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে, $m\times n$

Shortcut Technic-02: AB অনির্ণয়যোগ্য **(১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ২য় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সমান নয়)** হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম/মাত্রা নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

যেমনঃ A ও B ম্যাট্রিক্সের ক্রম যথাক্রমে $m\times p$ এবং $q\times n$ হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম/মাত্রা নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

Shortcut Technic-03: (AB)C নির্ণয়যোগ্য **(১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ২য় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সমান)** হলে (AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম/মাত্রা =A ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা $\times$ C ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা।

যেমনঃ A, B ও C ম্যাট্রিক্সের ক্রম যথাক্রমে $4\times 5, 5\times 3$ এবং 3×2 হলে (AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে 4×2

*****1(i). যদি** $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$ **হয়, তবে 3A+4B এর মান নির্ণয় কর।**

(ii). যদি $A=\begin{bmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 4 & 8\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}-4 & 6 & 2\\ 1 & 3 & 7\\ 5 & 4 & 1\end{bmatrix}$ **হয়, তবে A+B, A-B , AB এর মান নির্ণয় কর।**

(iii). $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{bmatrix}$ হলে, 2A + B নির্ণয় কর। **(C-21)**

(iv). $P=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$ এবং $Q=[-2 \quad -1 \quad 0]$ হলে, $[PQ]^T$ নির্ণয় কর। **(C-21)**

R.H. Sir

(v). $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; $(2A - B)^T$ নির্ণয় কর।**(S-21)**

(vi). $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে BA নির্ণয় কর।**(R-21)**

(vii). $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1/4 & n \\ 0 & p \end{bmatrix}$, AB = I হলে, n ও p এর মান নির্ণয় কর।**(C-21)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ **এবং**

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore 3A = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & -12 \end{bmatrix}$ **এবং**

$\therefore 4B = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & 20 \end{bmatrix}$

$\therefore 3A + 4B = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & 20 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+4 & -15-8 & 3-12 \\ 9+0 & 0-4 & -12+20 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & -23 & -9 \\ 9 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ **এবং**

$B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8-4 & 4+6 & -1+2 \\ 0+1 & 1+3 & 3+7 \\ 5+5 & 4+4 & 8+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore A - B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8+4 & 4-6 & -1-2 \\ 0-1 & 1-3 & 3-7 \\ 5-5 & 4-4 & 8-1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore AB = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8.(-4)+4.1+(-1).5 & 8.6+4.3+(-1).4 & 8.2+4.7+(-1).1 \\ 0.(-4)+1.1+3.5 & 0.6+1.3+3.4 & 0.2+1.7+3.1 \\ 5.(-4)+4.1+8.5 & 5.6+4.3+8.4 & 5.2+4.7+8.1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -32+4-5 & 48+12-4 & 16+28-1 \\ 0+1+15 & 0+3+12 & 0+7+3 \\ -20+4+40 & 30+12+32 & 10+28+8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -33 & 56 & 43 \\ 16 & 15 & 10 \\ 24 & 74 & 46 \end{bmatrix}$

(iii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $B + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2I$

$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4-2 & 3-0 \\ 2-0 & 5-2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(Ans)**

*****2(i). যদি**

$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 6 & 13 & -6 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -1 \\ 4 & -7 & 10 \end{bmatrix}$

হয় Aও B তবে নির্ণয় কর। (B-19)

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 6 & 13 & -6 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -1 \\ 4 & -7 & 10 \end{bmatrix}$

R.H. Sir

$$\therefore A+B+A-B=\begin{bmatrix}5 & 4 & 9\\ 6 & 13 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & -10 & -1\\ 4 & -7 & 10\end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A=\begin{bmatrix}14 & -6 & 8\\ 10 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}7 & -3 & 4\\ 5 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

এবং

$$\therefore A+B-(A-B)=\begin{bmatrix}5 & 4 & 9\\ 6 & 13 & -6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & -10 & -1\\ 4 & -7 & 10\end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B-A+B=\begin{bmatrix}-4 & 14 & 10\\ 2 & 20 & -16\end{bmatrix}$$

$$\therefore 2B=\begin{bmatrix}-4 & 14 & 10\\ 2 & 20 & -16\end{bmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{bmatrix}-2 & 7 & 5\\ 1 & 10 & -8\end{bmatrix}$$

*****3(i). দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হওয়ার শর্ত কী কী ?(Ch-19)**

(ii). যদি $P=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ **হয়, তবে** $P-Q$ **ম্যাট্রিক্সটির নাম কী ? (C-19)**

(i). সমাধানঃ দুটি ম্যাট্রিক্স সমান হবে যদি এদের ক্রম সমান হয় এবং উভয়ের অনুরূপ ভুক্তি সমূহ সমান হয়।

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$P=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$\therefore P-Q=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-2 & -1+1\\ 2-2 & -2+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

যা একটি একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স।

*****4(i). যদি** $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 4\end{bmatrix}$ **হয়, তবে** $A\times C$ **নির্ণয় করে উহার মাত্রা নির্ণয় কর। (D-17)**

(ii). $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & m\end{bmatrix}$, m এর মান কত হলে A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস 5 হবে?**(Ch-21)**

(iii). $\begin{bmatrix}0 & 7 & 10\\ -7 & 0 & 15\\ -10 & -15 & 0\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম কিনা যাচাই কর।**(M-21)**

(iv). $\begin{bmatrix}0 & 2 & m\\ -2 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 0\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে m এর মান নির্ণয় কর।**(J-21)**

(v). $\begin{bmatrix}3 & 7\\ x & -2\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হলে x এর মান নির্ণয় কর।

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore A\times C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+20+8\\ 8+0+12\\ 4+15+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30\\ 20\\ 27\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$\therefore A\times C$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3×1

*****5(i).** $\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি (involutory) কি-না যাচাই কর।**(J-21)**

(ii). যদি $A=\begin{bmatrix}a & a+1\\ -a+1 & -a\end{bmatrix}$ **এবং a=5 হয়, তবে দেখাও যে, A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স। (D-19)**

(iii). দেখাও যে, $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ একটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স।**(D-21)**

(iv). $P=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -3 & -3\end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, P একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স।**(B-21)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}a & a+1\\ -a+1 & -a\end{bmatrix}$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}5 & 5+1\\ -5+1 & -5\end{bmatrix}\quad [\because a=5]$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}5 & 6\\ -4 & -5\end{bmatrix}$$

আমরা জানি, একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2=I$ হয়।

এখন, $A^2=A.A$

R.H.Sir

$=\begin{bmatrix}5 & 6\\ -4 & -5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 6\\ -4 & -5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}25-24 & 30-30\\ -20+20 & -24+25\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore A^2=I$

$\therefore A$ ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি। (Showed)

*****6(i). যদি**

$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

হয়, তবে $AB+B^T-2C$ **এর মান নির্ণয় কর। (Ch-19)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

এখন, $AB=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3-4 & 7-2\\ 9+12 & 21+6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 21 & 27\end{bmatrix}$

আবার, $B^T=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}^T$

$=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}$

পুনরায়, $2C=2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 16\end{bmatrix}$

$\therefore AB+B^T-2C=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 21 & 27\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 16\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1+3-0 & 5+2-2\\ 21+7-4 & 27+1-16\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 24 & 12\end{bmatrix}$

****7(i). যদি** $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ **এবং**

$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ **হয়, তবে** $AB,\ BA$ **এর মান নির্ণয় কর।**

(ii). যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$ **হয়, তবে** AB **এর মান নির্ণয় কর।**

(iii). যদি $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{bmatrix}$ **হয়, তবে** $AB,\ BA$ **এর মান নির্ণয় কর।**

(iv). যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $AB\neq BA$**. (D-8)**

(v). যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ **এবং**

$B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,**

$AB=BA$**. (D-5)**

(vi). যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$ **এবং**

$B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $AB\neq BA$

(iv). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ **এবং**

$B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1.0+2.1+3.0 & 1.2+2.2+3.(-1)\\ 4.0+5.1+6.0 & 4.2+5.2+6.(-1)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0+2+0 & 2+4-3\\ 0+5+0 & 8+10-6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 12\end{bmatrix}$

R.H.Sir

$$\therefore BA=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.1+2.4 & 0.2+2.5 & 0.3+2.6\\ 1.1+2.4 & 1.2+2.5 & 1.3+2.6\\ 0.1+(-1).4 & 0.2+(-1).5 & 0.3+(-1).6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+8 & 0+10 & 0+12\\ 1+8 & 2+10 & 3+12\\ 0-4 & 0-5 & 0-6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 10 & 12\\ 9 & 12 & 15\\ -4 & -5 & -6\end{bmatrix}$$

$\therefore AB \neq BA$ **(Showed)**

(v). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ **এবং**

$$B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2.3+0+(-1).5 & 2.(-1)+0+(-1).(-2) & 2.1+0+(-1).2\\ 5.3+1.(-15)+0.5 & 5.(-1)+1.6+0 & 5.1+1.(-5)+0\\ 0.3+1.(-15)+3.5 & 0+1.6+3.(-2) & 0+1.(-5)+3.2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6+0-5 & -2+0+2 & 2+0-2\\ 15-15+0 & -5+6+0 & 5-5+0\\ 0-15+15 & 0+6-6 & 0-5+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

$$\therefore BA=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3.2+(-1).5+0 & 3.0+(-1).1+1.1 & 3.(-1)+(-1).0+1.3\\ -15.2+6.5+0 & 0+6.1+(-5).1 & -15.(-1)+0+(-5).3\\ 5.2+(-2).5+2.0 & 0+(-2).1+2.1 & 5.(-1)+(-2).0+2.3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-5+0 & 0-1+1 & -3-0+3\\ -30+30+0 & 0+6-5 & 15+0-15\\ 10-10+0 & 0-2+2 & -5-0+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

$\therefore AB=BA=I_3$ **(Showed)**

(vi). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$ **এবং**

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.(-1)+0.4+(-2).2 & 1.3+0.0+(-2).6\\ 3.(-1)+(-2).4+(-1).2 & 3.3+(-2).0+(-1).6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+0-4 & 3+0-12\\ -3-8-2 & 9+0-6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & -9\\ -13 & 3\end{bmatrix}$$

এবং $BA=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(-1).1+3.3 & (-1).0+3.(-2) & (-1).(-2)+3.(-1)\\ 4.1+0.3 & 4.0+0.(-2) & 4.(-2)+0.(-1)\\ 2.1+6.3 & 2.0+6.(-2) & 2.(-2)+6.(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+9 & 0-6 & 2-3\\ 4+0 & 0+0 & -8+0\\ 2+18 & 0-12 & -4-6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & -6 & -1\\ 4 & 0 & -8\\ 20 & -12 & -10\end{bmatrix}$$

$\therefore AB \neq BA$ **(Showed)**

R.H.Sir

**8(i). যদি $A=\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ এবং

$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}$ হয়,তবে প্রমাণ কর যে,

$AB=BA=I_3$ **(D-10)**

(ii). যদি $A=\begin{bmatrix}4 & 8 & 4\\ 0 & 4 & 4\\ 8 & 0 & 8\end{bmatrix}$ এবং

$B=\begin{bmatrix}2 & -4 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}$ হয়,তবে প্রমাণ কর যে,

$AB=BA=16I_3$

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ এবং

$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3.1+(-4).2+2.3 & 3.2+(-4).5+2.7 & 3.(-2)+(-4).(-4)+2.(-5)\\ (-2).1+1.2+0.3 & (-2).2+1.5+0.7 & (-2).(-2)+1.(-4)+0.(-5)\\ (-1).1+(-1).2+1.3 & (-1).2+(-1).5+1.7 & (-1).(-2)+(-1).(-4)+1.(-5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-8+6 & 6-20+14 & -6+16-10\\ -2+2+0 & -4+5+0 & 4-4+0\\ -1-2+3 & -2-5+7 & 2+4-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

$$\therefore BA=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.3+2.(-2)+(-2).(-1) & 1.(-4)+2.1+(-2).(-1) & 1.2+2.0+(-2).1\\ 2.3+5.(-2).1+(-4).(-1) & 2.(-4)+5.1+(-4).(-1) & 2.2+5.0+(-4).1\\ 3.3+7.(-2)+(-5).(-1) & 3.(-4)+7.1+(-5).(-1) & 3.2+7.0+(-5).1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-4+2 & -4+2+2 & 2+0-2\\ 6-10+4 & -8+5+4 & 4+0-4\\ 9-14+5 & -12+7+5 & 6+0-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

$\therefore AB=BA=I_3$ **(Showed)**

***9(i). যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ হয় তবে

$A^2+2A-11I$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii). যদি $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ হয়, তবে $A^2-5A+6I$ এর মান নির্ণয় কর। **(D-7)**

(iii). যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ এবং

$C=A-B$ হয় তবে $C^2+5B+3I$ এর মান নির্ণয় কর। **(Dj-19)**

(iv). যদি

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 7\\ 5 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

হয়, তবে $AB-C^2+2I_2$ এর মান নির্ণয় কর। **(C-17)**

(v). যদি $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ হয়, তবে $A^2-5A+6I$ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে, $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **(B-17)**

(vi). $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $f(x)=x^2+3x-7$; $f(C)$ নির্ণয় কর। **(M-21)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

$$\therefore A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.1+2.4 & 1.2+2.(-3)\\ 4.1+(-3).4 & 4.2+(-3)(-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+8 & 2-6\\ 4-12 & 8+9\end{bmatrix}$$

R.H. Sir

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 + 2A - 11I = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.3 + 2.5 & 3.2 + 2.(-1) \\ 5.3 + (-1).5 & 5.2 + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 + 10 & 6 - 2 \\ 15 - 5 & 10 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 25 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$$

*****10(i). যদি** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে** $A^2 - 4A - 5I$ **এর মান নির্ণয় কর।**

(ii). যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **এবং** $f(t) = t^2 - 3t + 2I$ **হয়, তবে** $f(A)$ **এর মান নির্ণয় কর। (S-19)**

(iii). যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ **এবং** $f(x) = 3x^2 + 5x$ **হয়, তবে** $f(A)$ **এর মান নির্ণয় কর। (All-18)**

(iv). যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, f(x) = x^2 + 3x$ **হয়, তবে** $f(A) + I$ **এর মান নির্ণয় কর। (R-17)**

(v). যদি

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = A^T, f(x) = x^2 - 4x$ **হয়, তবে** $f(B)$ **এর মান নির্ণয় কর। (Ch-17)**

(vi). যদি $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে** $M^2 - 3M + MI$ **এর মান নির্ণয় কর। (Dj-17)**

(vii). যদি $A = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে** $5A^2 - 3I$ **এর মান নির্ণয় কর।** যেখানে, I একটি একক ম্যাট্রিক্স। **(R-19)**

(viii). $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$; **যেখানে** $a_{ij} = 2i - j$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **এবং** $f(x) = x^2 + 3x$ হলে $f(A) + 2I_3$ নির্ণয় কর। **(D-21)**

(ix). $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$; **যেখানে** $a_{ij} = 2i - j$,$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **এবং** $f(x) = x^2 + 3x$ হলে $(A + I_3).(A^T - I_3)$ নির্ণয় কর। **(D-21)**

(x). $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - x + 3$, $f(A)$ নির্ণয় কর|**(B-21)**

(xi). $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2I$, যেখানে I অভেদক ম্যাট্রিক্স, $f(A^T)$ নির্ণয় কর, যেখানে A^T হচ্ছে A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স।**(J-21)**

(xii). $P = \begin{bmatrix} 1+x^2-y^2 & 2xy & 2y \\ 2xy & 1-x^2+y^2 & -2x \\ -2y & 2x & 1-x^2-y^2 \end{bmatrix}$

এবং $f(x) = x^3 - 3x + 2I$, $x = 1$, $y = 2$ হলে $f(P)$ নির্ণয় কর,

যেখানে, I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স।**(R-21)**

(xiii). $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $f(x) = 3x^2 + 2x - 5I$;

$f(A)$ নির্ণয় কর। **(S-21)**

(xiv). $x + 3y + 2z = 5$

$2x + y + 3z = 1$

$3x + 2y + z = 4$

প্রদত্ত সমীকরণ জোটের চলকসমূহের সহগগুলো দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সটি M

হলে $M^2 - 2M + 3I$ এর মান নির্ণয় কর।**(Ch-21)**

(xv). $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $C = A^t$ হলে

$C^2 - 5C + 6I$ নির্ণয় কর।(Dj-21)

(xvi). যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে**

$A^3 - 2A^2 - I$ **এর মান নির্ণয় কর।**

(xvii). যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে**

$A^3 - 2A^2 + A - 2I$ **এর মান নির্ণয় কর। (D-12,14)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1.1+2.2+2.2 & 1.2+2.1+2.2 & 1.2+2.2+2.1 \\ 2.1+1.2+2.2 & 2.2+1.1+2.2 & 2.2+1.2+2.1 \\ 2.1+2.2+1.2 & 2.2+2.1+1.2 & 2.2+2.2+1.1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 - 4A - 5I$

$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **এবং**

$f(t) = t^2 - 3t + 2I$

নির্ণয় করতে হবে যে, $f(A) = A^2 - 3A + 2I$

(iii). সমাধানঃ Same(ii)

(iv). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x$

$\therefore f(A) = A^2 + 3A$

নির্ণয় করতে হবে যে, $f(A) + I$

(v). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = A^T$, $f(x) = x^2 - 4x$

$\therefore B = A^T$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

নির্ণয় করতে হবে যে, $f(B) = B^2 - 4B$

(viii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, এখানে, $A = [a_{ij}]_{3\times3}$

$\therefore$ A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স যার ভুক্তিগুলি $a_{ij} = 2i - j$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

$\therefore a_{11} = 2\times1 - 1 = 2 - 1 = 1$

R.H.Sir

$a_{12} = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$

$a_{13} = 2 \times 1 - 3 = 2 - 3 = -1$

$a_{21} = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_{22} = 2 \times 2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$a_{23} = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$a_{31} = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

$a_{32} = 2 \times 3 - 2 = 6 - 2 = 4$

$a_{33} = 2 \times 3 - 3 = 6 - 3 = 3$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(xvi). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1+3.2+2.1 & 1.3+3.0+2.(-1) & 1.2+3.3+2.1 \\ 2.1+0.2+3.1 & 2.3+0.0+3.(-1) & 2.2+0.3+3.1 \\ 1.1+(-1).2+1.1 & 1.3+(-1).0+1.(-1) & 1.2+(-1).3+1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0-2 & 2+9+2 \\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0+3 \\ 1-2+1 & 3+0-1 & 2-3+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2.A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3 = \begin{bmatrix} 9.1+1.2+13.1 & 9.3+1.0+13.(-1) & 9.2+1.3+13.1 \\ 5.1+3.2+7.1 & 5.3+3.0+7.(-1) & 5.2+3.3+7.1 \\ 0.1+2.2+0.1 & 0.3+2.0+0.(-1) & 0.2+2.3+0.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+2+13 & 27+0-13 & 18+3+13 \\ 5+6+7 & 15+0-7 & 10+9+7 \\ 0+4+0 & 0+0+0 & 0+6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3 - 2A^2 - I$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 2 & 26 \\ 10 & 6 & 14 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 & 2 & 26 \\ 10 & 7 & 14 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 12 & 8 \\ 8 & 1 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

(xvii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1+3.2+2.1 & 1.3+3.0+2.(-1) & 1.2+3.3+2.1 \\ 2.1+0.2+3.1 & 2.3+0.0+3.(-1) & 2.2+0.3+3.1 \\ 1.1+(-1).2+1.1 & 1.3+(-1).0+1.(-1) & 1.2+(-1).3+1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0-2 & 2+9+2 \\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0+3 \\ 1-2+1 & 3+0-1 & 2-3+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.1+1.2+13.1 & 9.3+1.0+13.(-1) & 9.2+1.3+13.1 \\ 5.1+3.2+7.1 & 5.3+3.0+7.(-1) & 5.2+3.3+7.1 \\ 0.1+2.2+0.1 & 0.3+2.0+0.(-1) & 0.2+2.3+0.1 \end{bmatrix}$$

R.H.Sir

$$=\begin{bmatrix} 9+2+13 & 27+0-13 & 18+3+13 \\ 5+6+7 & 15+0-7 & 10+9+7 \\ 0+4+0 & 0+0+0 & 0+6+0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3-2A^2+A-2I$$

$$=\begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 18 & 2 & 26 \\ 10 & 6 & 14 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 18 & 2 & 26 \\ 10 & 6 & 14 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 25 & 17 & 36 \\ 20 & 8 & 29 \\ 5 & -1 & 7 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 20 & 2 & 26 \\ 10 & 8 & 14 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

*****11(i).** $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+F=I_2$ **হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। যেখানে,** I_2 **একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স। (J-17)**

(ii). $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ **এবং** $A^2+2A-11X=0$ **হলে X নির্ণয় কর।**

(iii). যদি $B+2I=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে B এর মান নির্ণয় কর। (J-19)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+F=I_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}+F=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore F=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore F=\begin{bmatrix} 1-2 & 0+4 \\ 0-4 & 1+2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore F=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(iii). সমাধানঃ Same(i)

*****12(i). যদি** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ **এবং** $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ **হয় তবে প্রমাণ কর যে,** $(AB)C=A(BC)$. **(D-13)**

(ii). যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **এবং** $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $(AB)C=A(BC)$.

(iii). যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ **এবং** $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $(AB)C=A(BC)$

(iv). যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **এবং** $C=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $(AB)C=A(BC)$

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ **এবং** $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1.4+2.6+3.(-1) \\ 4.4+5.6+6.(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4+12-3 \\ 16+30-6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)C=\begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

R.H.Sir

$$=\begin{bmatrix} 13.1 & 13.2 & 13.(-5) & 13.6 \\ 40.1 & 40.2 & 40.(-5) & 40.6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$$

আবার,

$$\therefore BC=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4.1 & 4.2 & 4.(-5) & 4.6 \\ 6.1 & 6.2 & 6.(-5) & 6.6 \\ -1.1 & -1.2 & -1.(-5) & -1.6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1.4+2.6+3.(-1) & 1.8+2.12+3.(-2) & 1.(-20)+2.(-30)+3.5 & 1.24+2.36+3.(-6) \\ 4.4+5.6+6.(-1) & 4.8+5.12+6.(-2) & 4.(-20)+5(-30)+6.5 & 4.24+5.36+6.(-6) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4+12-3 & 8+24-6 & -20-60+15 & 24+72-18 \\ 16+30-6 & 32+60-12 & -80-150+30 & 96+180-36 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)C = A(BC)$. **(Showed)**

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **এবং** $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1.4+2.2 & 1.3+2.1 \\ 3.4+4.2 & 3.3+4.1 \\ 0.4+1.2 & 0.3+1.1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)C=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 8.1+5.2 & 8.2+5.3 \\ 20.1+13.2 & 20.2+13.3 \\ 2.1+1.2 & 2.2+1.3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 8+10 & 16+15 \\ 20+26 & 40+39 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

আবার, $BC=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 4.1+3.2 & 4.2+3.3 \\ 2.1+1.2 & 2.2+1.3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4+6 & 8+9 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1.10+2.4 & 1.17+2.7 \\ 3.10+4.4 & 3.17+4.7 \\ 0.10+1.4 & 0.17+1.7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 10+8 & 17+14 \\ 30+16 & 51+28 \\ 0+4 & 0+7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)C = A(BC)$ **(Showed)**

R.H. Sir

(iv). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ এবং $C=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.1+(-1).2 & 1.3+(-1).0 & 1.0+(-1).1\\0.1+2.2 & 0.3+2.0 & 0.0+2.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-2 & 3+0 & 0-1\\0+4 & 0+0 & 0+2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\4 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)C=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\4 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1.2+3.3+(-1).1\\4.2+0.3+2.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2+9-1\\8+0+2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}$$

আবার,

$$BC=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.2+3.3+0.1\\2.2+0.3+1.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+9+0\\4+0+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11\\5\end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC)=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.11+(-1).5\\0.11+2.5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11-5\\0+10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)C=A(BC)$. **(Showed)**

13(i). যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\2 & -1 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 1\\2 & 4\\1 & -2\end{bmatrix}$ **হয়,**

তবে দেখাও যে, $(AB)'=B'A'$

(ii). যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 4 & 3\\7 & 3 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6 & 0 & 9\\7 & 1 & 5\\-3 & 4 & 1\end{bmatrix}$ **হয়,**

তবে দেখাও যে, $(AB)^T=B^TA^T$

*****14(i). যদি** $A=\begin{bmatrix}x+y & 6\\x-y & 9\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}7 & a+b\\3 & ab\end{bmatrix}$

এবং $A=B$ **হয়, তবে a,b,x,y এর মান নির্ণয় কর। (Dj-17)**

(ii). যদি $\begin{bmatrix}2 & -x\\y-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3+y\\4 & 2\end{bmatrix}$ **হয়, তবে (x,y) এর মান নির্ণয় কর। (Dj-17)**

(iii). যদি $\begin{bmatrix}x & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\4\\-1\end{bmatrix}=0$ **হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।**

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix}2 & -x\\y-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3+y\\4 & 2\end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$-x=3+y$............(i)

$y-1=4$.............(ii)

সমীকরণ (ii) নং হতে পাই, $y=4+1$

$\therefore y=5$

y এর মান (i) নং বসিয়ে পাই, $-x=3+5$

$\Rightarrow -x=8$

$\therefore x=-8$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $(x,y)=(-8,5)$

অনুশীলনী-

1. **নির্ণায়কঃ** নির্ণায়ক হচ্ছে একটি বিশেষ আকারে লিখিত বর্গ ম্যাট্রিক্সের সংখ্যা রাশি। ইহাকে দুইটি উলম্ব রেখার `| |' সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

2. **নির্ণায়কের বিস্তারঃ** $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

$$=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

R.H. Sir

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

3. নির্ণায়কের ধর্মাবলীঃ

(i). কোন নির্ণায়কের সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না। যেমনঃ

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(ii). কোন নির্ণায়কের সারি-সারি বা কলাম-কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের চিহ্ন পরিবর্তিত হয় কিন্তু সংখ্যামান অপরিবর্তিত থাকে। যেমনঃ

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

OR,

$$= -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(iii). কোন নির্ণায়কের যেকোনো একটি সারি বা কলাম শূন্য হলে ঐ নির্ণায়কের মান শূন্য হয়।

যেমনঃ

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

OR, $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(iv). কোন নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হলে ঐ নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমনঃ $$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

OR,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(v). কোন নির্ণায়কের সারি বা কলাম সমান্তর ধারায় থাকলে ঐ নির্ণায়কের মান শূন্য হবে। যেমনঃ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(vi). কোন নির্ণায়কের সারি বা কলামের মধ্যে যত রকমের রৈখিক সমাবেশ সম্ভব সবকিছু ঘটানো যায়।

যেমনঃ $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 \pm b_1 & b_1 \pm c_1 & c_1 \\ a_2 \pm b_2 & b_2 \pm c_2 & c_2 \\ a_3 \pm b_3 & b_3 \pm c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

OR, $$D = \begin{vmatrix} a_1 \pm a_2 & b_1 \pm b_2 & c_1 \pm c_2 \\ a_2 \pm a_3 & b_2 \pm b_3 & c_2 \pm c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

OR,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 & c_1 + c_2 + c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

OR, $$D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(vii). কোন নির্ণায়কের যে কোন সারি বা কলামের প্রত্যেকটি ভুক্তিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে ঐ নির্ণায়কের মানকেও একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হবে।

যেমনঃ $$D = \begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(viii). কোন নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলির প্রত্যেকটি দুইটি ভুক্তির সমষ্টি বা অন্তররূপে গঠিত হলে ঐ নির্ণায়কে দুইটি নির্ণায়কের সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়। যেমনঃ

R.H.Sir

$$D=\begin{vmatrix} a_1\pm\alpha & b_1 & c_1 \\ a_2\pm\beta & b_2 & c_2 \\ a_3\pm\gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\pm\begin{vmatrix} \alpha & b_1 & c_1 \\ \beta & b_2 & c_2 \\ \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. **ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সঃ** $|A|=0$ হলে ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ যে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য তাকে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

5. **অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সঃ** $|A|\neq 0$ হলে ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ যে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য হয় না তাকে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

6. **আনুপাতিক/অনুরাশিঃ** কোন নির্ণায়কের সারি এবং কলাম বাদ দিলে যে রেজাল্ট পাওয়া যায় সেইটা কোন নির্ণায়কের অনুরাশি।

উদাহরণঃ $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\therefore a_1$ এর অনুরাশি হল $=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$=b_2c_3-b_3c_2$

7. **সহগুণকঃ** অনুরাশির সাথে $(-1)^{i+j}$ গুন করলে যে রেজাল্ট পাওয়া যায় সেইটা কোন নির্ণায়কের সহগুনক। যেখানে, i= সারি, j= কলাম

উদাহরণঃ $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\therefore a_1$ এর সহগুনক হল $=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{1+1}(b_2c_3-b_3c_2)$

$=(-1)^2(b_2c_3-b_3c_2)$

$=b_2c_3-b_3c_2$

8. **রূপান্তরিত/বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose matrix):** কোন ম্যাট্রিক্সের সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। ইহাকে " A^T / A' " দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

9. **বিপরীত ম্যাট্রিক্স:** দুইটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের গুণফল যদি একক ম্যাট্রিক্সের সমান হয় তবে এদের একটিকে অপরটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় অর্থাৎ যদি কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য একটি একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স B থাকে যেন $AB=BA=I$ হয়, তবে B ম্যাট্রিক্সকে A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলে। A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করার তিনটি পদ্ধতি আছে।

(i). সমাধান পদ্ধতি: $(AX=B\therefore X=A^{-1}B)$

(ii).অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি: $\left(A^{-1}=\dfrac{AdjA}{|A|}[\because |A|\neq 0]\right)$

(iii). ব্লক ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি:

10. **Adjoint ম্যাট্রিক্স:** কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের সহগুনকগুলি দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সকে সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স এর **Adjoint** ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং এটিকে **AdjA** দ্বারা সূচিত করা হয়।

11. **বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করার সূত্রঃ**

$$A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}[\because |A|\neq 0]$$

12. **ইনভারটিবল ম্যাট্রিক্সঃ** কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে ম্যাট্রিক্সটি ইনভারটিবল হবে।

13. **ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমীকরণ জোটের সমাধানঃ**

$AX=B\therefore X=A^{-1}B$

14. **নির্ণায়কের সাহায্যে দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধানঃ** $x=\dfrac{D_x}{D}, y=\dfrac{D_y}{D}$

15. **নির্ণায়কের সাহায্যে তিন চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধানঃ** $x=\dfrac{D_x}{D}, y=\dfrac{D_y}{D}, z=\dfrac{D_z}{D}$

বিঃ দ্রঃ- সমীকরণ জোটের সমাধানের জন্য উপরে বর্ণিত প্রক্রিয়াকে ক্রেমারের প্রক্রিয়া (Cramer's Rules) বলা হয়।

16. **নির্ণায়ক সমাধান করার নিয়মঃ (যত বেশি সম্ভব 0 আনার চেষ্টা করবো)**

(i). প্রথমে কোন নির্ণায়কের যেকোনো সারি বা কলাম (১ম সারি বা ১ম কলাম) কে এক রকম বানাতে হবে।

(ii). তারপর ঐ সারি বা কলাম থেকে কমন নিতে হবে।

(iii). কমন নেওয়ার পর ঐ সারি বা কলামের যেকোনো দুইটি পরপর শূন্য বানাতে হবে।

(iv). এরপর ঐ শূন্য সারি বা কলাম বরাবর সূত্র (নির্ণায়কের বিস্তার) প্রয়োগ করতে হবে।

বিঃদ্রঃ নির্ণায়কের সারি ও কলাম অবশ্যই সমান হতে হবে।

অনুশীলনী-

*****1(i).ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের দুটি পার্থক্য লিখ।(B-19,Ch-21)**

ম্যাট্রিক্স	নির্ণায়ক
(i).ম্যাট্রিক্স আয়তাকার বা বর্গাকার যেকোনো আকৃতির হতে পারে।	(i).নির্ণায়ক কেবল বর্গাকার হতে পারে।
(ii).ম্যাট্রিক্সকে তৃতীয় বন্ধনী	(ii).নির্ণায়ককে কেবলমাত্র

R.H. Sir

[ ] অথবা, প্রথম বন্ধনী ( ) অথবা, দুই জোড়া উলম্ব রেখা $\Vert\ \Vert$ এর সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।	দুইটি উলম্ব রেখার $\vert\ \vert$ সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।
(iii). ম্যাট্রিক্সের কোনো মান নেই।	(iii). নির্ণায়কের একটি নির্দিস্ট মান আছে।

*****2(i).** $A=\begin{bmatrix}12 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 6 & 1 & 0\end{bmatrix}$ **এর $(3,2)$ তম ভুক্তির অনুরাশি ও সহগুণক নির্ণয় কর। (R-19)**

সমাধানঃ দেওয়া আছে , $A=\begin{bmatrix}12 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 6 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore$ 1 এর অনুরাশি বা, $(3,2)$ তম ভুক্তির অনুরাশি হলো

$=\begin{vmatrix}12 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}$

$=(12-0)$

$=12$

এবং 1 এর সহগুণক বা, $(3,2)$ তম ভুক্তির সহগুণক হলো

$=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}12 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}$

$=(-1)^5(12-0)$

$=-12$

****3(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix}a+x & b+x & c+x\\ a+y & b+y & c+y\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(x-y).$$

(ii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}\log x & \log y & \log z\\ \log 2x & \log 2y & \log 2z\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}=0$$

(iii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & 1\\ (c+a)^2 & b^2 & 1\\ (a+b)^2 & c^2 & 1\end{vmatrix}=-2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

(i). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}a+x & b+x & c+x\\ a+y & b+y & c+y\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a+x-b-x & b+x-c-x & c+x\\ a+y-b-y & b+y-c-y & c+y\\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2\end{vmatrix}$

$[\because c_1'=c_1-c_2,, c_2'=c_2-c_3]$

$=\begin{vmatrix}a-b & b-c & c+x\\ a-b & b-c & c+y\\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a-b & b-c & c+x\\ a-b & b-c & c+y\\ (a-b)(a+b) & (b-c)(b+c) & c^2\end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1 & 1 & c+x\\ 1 & 1 & c+y\\ (a+b) & (b+c) & c^2\end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1-1 & 1-1 & c+x-c-y\\ 1 & 1 & c+y\\ (a+b) & (b+c) & c^2\end{vmatrix}$

$[r_1'=r_1-r_2]$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}0 & 0 & x-y\\ 1 & 1 & c+y\\ (a+b) & (b+c) & c^2\end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)(x-y)\begin{vmatrix}1 & 1\\ (a+b) & (b+c)\end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)(x-y)\{(b+c)-(a+b)\}$

$=(a-b)(b-c)(x-y)(b+c-a-b)$

$=(a-b)(b-c)(x-y)(c-a)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$

$=R.H.S$

(ii). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}\log x & \log y & \log z\\ \log 2x & \log 2y & \log 2z\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\log x-\log 2x & \log y-\log 2y & \log z-\log 2z\\ \log 2x-\log 3x & \log 2y-\log 3y & \log 2z-\log 3z\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}$

$[r_1'=r_1-r_2, r_2'=r_2-r_3]$

R.H.Sir

$$=\begin{vmatrix}\log\frac{x}{2x} & \log\frac{y}{2y} & \log\frac{z}{2z}\\ \log\frac{2x}{3x} & \log\frac{2y}{3y} & \log\frac{2z}{3z}\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}$$

$[\because \log M-\log N=\log(\frac{M}{N})]$

$$=\begin{vmatrix}\log\frac{1}{2} & \log\frac{1}{2} & \log\frac{1}{2}\\ \log\frac{2}{3} & \log\frac{2}{3} & \log\frac{2}{3}\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}$$

$$=\log\frac{1}{2}.\log\frac{2}{3}.\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ \log 3x & \log 3x & \log 3x\end{vmatrix}$$

$=\log\frac{1}{2}.\log\frac{2}{3}\times 0$

$=0=R.H.S$

(iii). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & 1\\ (c+a)^2 & b^2 & 1\\ (a+b)^2 & c^2 & 1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2-a^2 & a^2 & 1\\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & 1\\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & 1\end{vmatrix}\;[c_1'=c_1-c_2]$$

$$=\begin{vmatrix}(b+c+a)(b+c-a) & a^2 & 1\\ (c+a+b)\,(c+a-b) & b^2 & 1\\ (a+b+c)\,(a+b-c) & c^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}(b+c-a) & a^2 & 1\\ (c+a-b) & b^2 & 1\\ (a+b-c) & c^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}(b+c-a)-(c+a-b) & a^2-b^2 & 1-1\\ (c+a-b)-(a+b-c) & b^2-c^2 & 1-1\\ (a+b-c) & c^2 & 1\end{vmatrix}$$

$[r_1'=r_1-r_2,,r_2'=r_2-r_3]$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}(b+c-a-c-a+b) & (a+b)(a-b) & 0\\ (c+a-b-a-b+c) & (b+c)(b-c) & 0\\ (a+b-c) & c^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}(2b-2a) & (a+b)(a-b) & 0\\ (2c-2b) & (b+c)(b-c) & 0\\ (a+b-c) & c^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}(2b-2a) & (a+b)(a-b)\\ (2c-2b) & (b+c)(b-c)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}-2(a-b) & (a+b)(a-b)\\ -2(b-c) & (b+c)(b-c)\end{vmatrix}$$

$$=-2(a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1 & (a+b)\\ 1 & (b+c)\end{vmatrix}$$

$=-2(a+b+c)(a-b)(b-c)\{(b+c)-(a+b)\}$

$=-2(a+b+c)(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$=-2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$=R.H.S$

*****4(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{vmatrix}=p\,(p-1)^2\,(p^2-1).$$

(ii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=abc\,(a-b)(b-c)(c-a).$$

(iii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(iv). $\left.\begin{array}{c}\mathbf{x+y+z=3}\\ \mathbf{x+ay+a^2z=}\boldsymbol{l}\\ \mathbf{x+a^2y+a^4z=m}\end{array}\right\}$ **;** সমীকরণগুলোকে AX = B আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, **Det(A) = a(a – 1)^2 (a^2 – 1).(M-21)**

(v). প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{p} & \mathbf{p^2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{p^2} & \mathbf{p^4}\end{vmatrix}$ **= p(p – 1)^2(p^2 – 1) (R-21)**

R.H. Sir

(i). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1 & 1-1 & 1-1\\ 1 & p-1 & p^2-p\\ 1 & p^2-1 & p^4-p^2\end{vmatrix}[c_2'=c_2-c_1,,c_3'=c_3-c_2]$

$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & p-1 & p^2-p\\ 1 & p^2-1 & p^4-p^2\end{vmatrix}$

$=1.\begin{vmatrix}p-1 & p^2-p\\ p^2-1 & p^4-p^2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}p-1 & p(p-1)\\ (p^2-1) & p^2(p^2-1)\end{vmatrix}$

$=(p-1)(p^2-1)\begin{vmatrix}1 & p\\ 1 & p^2\end{vmatrix}$

$=(p-1)(p^2-1)(p^2-p)$

$=(p-1)(p^2-1).p(p-1)$

$=p(p-1)^2(p^2-1)$

$=R.H.S$

(ii). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}$

$=abc\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=abc\begin{vmatrix}1-1 & 1-1 & 1\\ (a-b) & (b-c) & c\\ (a^2-b^2) & (b^2-c^2) & c^2\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1-c_2,,c_2'=c_2-c_3]$

$=abc\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ (a-b) & (b-c) & c\\ (a+b)(a-b) & (b+c)\ (b-c) & c^2\end{vmatrix}$

$=abc\begin{vmatrix}(a-b) & (b-c)\\ (a+b)(a-b) & (b+c)\ (b-c)\end{vmatrix}$

$=abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1 & 1\\ (a+b) & (b+c)\end{vmatrix}$

$=abc(a-b)(b-c)\{(b+c)-(a+b)\}$

$=abc(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$=abc(a-b)(b-c)(c-a)$

$=R.H.S$

(iii). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1-1 & 1-1 & 1\\ (a-b) & (b-c) & c\\ (a^3-b^3) & (b^3-c^3) & c^3\end{vmatrix}[c_1'=c_1-c_2,,c_2'=c_2-c_3]$

$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ (a-b) & (b-c) & c\\ (a-b)(a^2+ab+b^2) & (b-c)\ (b^2+bc+c^2) & c^2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}(a-b) & (b-c)\\ (a-b)(a^2+ab+b^2) & (b-c)(b^2+bc+c^2)\end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1 & 1\\ (a^2+ab+b^2) & (b^2+bc+c^2)\end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)\{(b^2+bc+c^2)-(a^2+ab+b^2)\}$

$=(a-b)(b-c)\ (b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$

$=(a-b)(b-c)\ (bc+c^2-a^2-ab)$

$=(a-b)(b-c)\ (c^2-a^2+bc-ab)$

$=(a-b)(b-c)\ \{(c+a)(c-a)+b(c-a)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(c+a+b)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$=R.H.S$

5(i). প্রমাণ কর যে,

$\begin{vmatrix}-a^2 & ab & ac\\ ab & -b^2 & bc\\ ac & bc & -c^2\end{vmatrix}=4a^2b^2c^2$

(i). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}-a^2 & ab & ac\\ ab & -b^2 & bc\\ ac & bc & -c^2\end{vmatrix}$

$=abc\begin{vmatrix}-a & a & a\\ b & -b & b\\ c & c & -c\end{vmatrix}$

$=a^2b^2c^2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$

R.H.Sir

$$= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} -1+1 & 1-1 & 1 \\ 1-1 & -1-1 & 1 \\ 1+1 & 1+1 & -1 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 + c_2, , c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2.1.\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2.(0+4)$$
$$= 4a^2b^2c^2$$
$$= R.H.S$$

*****6(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix} = 4xyz$$

(ii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$$

(i). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x+y-x-y & x & y \\ x-x-z-z & x+z & z \\ y-z-y-z & z & y+z \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2 - c_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix}$$

$$= -2z\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x+z & z \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix}$$

$$= -2z\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1-1 & x+z-z & z-y-z \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix} [r_2' = r_2 - r_3]$$

$$= -2z\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix}$$

$$= -2z.1.\begin{vmatrix} x & y \\ x & -y \end{vmatrix}$$

$$= -2z(-xy-xy)$$
$$= -2z(-2xy)$$
$$= 4xyz$$
$$= R.H.S$$

(ii). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix}$

$$= xyz\begin{vmatrix} x & z & x+z \\ x+y & y & x \\ y & y+z & z \end{vmatrix}$$

$$= xyz\begin{vmatrix} x-z-x-z & z & z+x \\ x+y-y-x & y & x \\ y-y-z-z & y+z & z \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2 - c_3]$$

$$= xyz\begin{vmatrix} -2z & z & z+x \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$$

$$= xyz(-2z)\begin{vmatrix} 1 & z & z+x \\ 0 & y & x \\ 1 & y+z & z \end{vmatrix}$$

$$= xyz(-2z)\begin{vmatrix} 1-1 & z-y-z & z+x-z \\ 0 & y & x \\ 1 & y+z & z \end{vmatrix} [r_1' = r_1 - r_3]$$

$$= xyz(-2z)\begin{vmatrix} 0 & -y & x \\ 0 & y & x \\ 1 & y+z & z \end{vmatrix}$$

$$= xyz(-2z)\begin{vmatrix} -y & x \\ y & x \end{vmatrix}$$

$$= xyz(-2z)(-xy-xy)$$
$$= xyz(-2z)(-2xy)$$
$$= 4x^2y^2z^2$$
$$= R.H.S$$

*****7(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

(ii). প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

R.H. Sir

(iii). $R=\begin{bmatrix} a & b & a+b+2c \\ b & b+c+2a & c \\ c+a+2b & a & c \end{bmatrix}$;প্রমাণ কর যে, $|R| = -2(a+b+c)^3$.**(C-21)**

(i). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a-b-c++2b+2c & 2a+b-c-a+2c & 2a+2b+c-a-b \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} [r_1' = r_1+r_2+r_3]$$

$$=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ 2b-(b-c-a) & b-c-a-2b & 2b \\ 2c-2c & 2c-(c-a-b) & c-a-b \end{vmatrix} [c_1' = c_1-c_2, c_2' = c_2-c_3]$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2b-b+c+a & b-c-a-2b & 2b \\ 0 & 2c-c+a+b & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b+c+a & -c-a-b & 2b \\ 0 & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c).1\begin{vmatrix} b+c+a & -c-a-b \\ 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-0\}$$

$$=(a+b+c)(a+b+c)^2$$

$$=(a+b+c)^3$$

$$=R.H.S$$

(ii). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a+b+2c+a+b & a & b \\ c+b+c+2a+b & b+c+2a & b \\ c+a+c+a+2b & a & c+a+2b \end{vmatrix} [c_1' = c_1+c_2+c_3]$$

$$=\begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1-1 & a-(b+c+2a) & b-b \\ 1-1 & b+c+2a-a & b-(c+a+2b) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1-r_2, r_2' = r_2-r_3]$

$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & a-b-c-2a & 0 \\ 0 & b+c+a & b-c-a-2b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -a-b-c & 0 \\ 0 & a+b+c & -b-c-a \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(b+c+a) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c).1.\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ a+b+c & -(b+c+a) \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)\{(a+b+c)^2-0\}$$

$$=2(a+b+c)(a+b+c)^2$$

$$=2(a+b+c)^3$$

$$=R.H.S$$

*****8(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = -(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$$

(i). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix} ax & by & ax+by \\ bx & cy & bx+cy \\ ax^2+bxy & bxy+cy^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 \times x,, c_2' = c_2 \times y]$

R.H.Sir

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix} ax & by & ax+by-(ax+by) \\ bx & cy & bx+cy-(bx+cy) \\ ax^2+bxy & bxy+cy^2 & 0-(ax^2+bxy+bxy+cy^2) \end{vmatrix}$$

$[c_3{}' = c_3-(c_1+c_2)]$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix} ax & by & 0 \\ bx & cy & 0 \\ ax^2+bxy & bxy+cy^2 & -(ax^2+2bxy+cy^2) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xy}\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}\begin{vmatrix} ax & by \\ bx & cy \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xy}\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}(acxy-b^2xy)$$

$$=\frac{1}{xy}\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}.xy.(ac-b^2)$$

$$=-(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$$

$$=(ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac)$$

$= R.H.S$

*****9(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

(ii). $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1+x^2-y^2 & 2xy & 2y \\ 2xy & 1-x^2+y^2 & -2x \\ -2y & 2x & 1-x^2-y^2 \end{bmatrix}$; $\det(P) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=-1$ **(R-21)**

(i). সমাধানঃ

$$L.H.S = \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b \\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a \\ 2b-b(1-a^2-b^2) & -2a+a(1-a^2-b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$[c_1{}' = c_1-bc_3, c_2{}' = c_2+ac_3]$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+b^2+a^2 & 2a \\ (2b-b+a^2b+b^3) & (-2a+a-a^3-ab^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+b^2+a^2 & 2a \\ (b+a^2b+b^3) & (-a-a^3-ab^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+b^2+a^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a\,(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b+2b \\ 0 & 1 & 2a+0 \\ b & -a & 1-a^2-b^2+2b^2 \end{vmatrix}$$

$[c_3{}' = c_3+2bc_1]$

$$=(1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2.1.\begin{vmatrix} 1 & 2a \\ -a & 1-a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2\{(1-a^2+b^2)-(-2a^2)\}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2(1-a^2+b^2+2a^2)$$

$$=(1+a^2+b^2)^2(1+a^2+b^2)$$

$$=(1+a^2+b^2)^3$$

$= R.H.S$

*****10(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

(ii). $\Delta = \begin{vmatrix} (s-x)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (s-y)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (s-z)^2 \end{vmatrix}$ এ যদি $s = x+y+z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\Delta = 2xyzs^3$. **(D-21)**

(i). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & b^2-b^2 \\ c^2 & c^2-c^2 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$[c_2' = c_2 - c_1,, c_3' = c_3 - c_1]$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\} & \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\} \\ b^2 & \{(c+a)+b\}\{(c+a)-b\} & 0 \\ c^2 & 0 & \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c) \\ b^2 & (c+a+b)\,(c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a-b-c) & (a-b-c) \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 - b^2 - c^2 & (a-b-c)-(c+a-b)-0 & (a-b-c)-0-(a+b-c) \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2 - r_3]$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b^2 + 2bc + c^2 - b^2 - c^2 & (a-b-c-c-a+b) & (a-b-c-a-b+c) \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{bc} \begin{vmatrix} 2bc & -2bc & -2bc \\ b^2 & b(c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & c(a+b-c) \end{vmatrix}$$

$[c_2' = c_2 \times b, c_3' = c_3 \times c]$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{bc} .2bc.bc. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ b & c+a-b & 0 \\ c & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$$

$$= 2bc.(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1+1 & -1+1 \\ b & c+a-b+b & 0+b \\ c & 0+c & a+b-c+c \end{vmatrix}$$

$[c_2' = c_2 + c_1,, c_3' = c_3 + c_1]$

$$= 2bc.(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2bc.(a+b+c)^2 .1. \begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix}$$

$= 2bc(a+b+c)^2 (ca + bc + a^2 + ab - bc)$

$= 2bc(a+b+c)^2 (ca + a^2 + ab)$

$= 2bc(a+b+c)^2 .a.(c+a+b)$

$= 2abc(a+b+c)^2 (a+b+c)$

$= 2abc(a+b+c)^3$

$= R.H.S$

(ii). সমাধানঃ s = x + y + z

$\therefore$ s – x = x + y + z – x = y + z

s – y = x + y + z – y = z + x

s – z = x + y + z – z = x + y

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} (s-x)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (s-y)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (s-z)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (z+x)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

****11(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

(i). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a(b^2 + c^2) & a^2 b & ca^2 \\ ab^2 & b(c^2 + a^2) & b^2 c \\ c^2 a & bc^2 & c(a^2 + b^2) \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 \times a,, r_2' = r_2 \times b,, r_3' = r_3 \times c]$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} ab^2 + c^2 a & a^2 b & ca^2 \\ ab^2 & bc^2 + a^2 b & b^2 c \\ c^2 a & bc^2 & ca^2 + b^2 c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} ab^2 + c^2 a - ab^2 - c^2 a & a^2 b - bc^2 - a^2 b - bc^2 & ca^2 - b^2 c - ca^2 - b^2 c \\ ab^2 & bc^2 + a^2 b & b^2 c \\ c^2 a & bc^2 & ca^2 + b^2 c \end{vmatrix} [r_1' = r_1 - r_2 - r_3]$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 0 & -2bc^2 & -2b^2 c \\ ab^2 & bc^2 + a^2 b & b^2 c \\ c^2 a & bc^2 & ca^2 + b^2 c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} (-2bc) \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ ab^2 & bc^2 + a^2 b & b^2 c \\ c^2 a & bc^2 & ca^2 + b^2 c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} (-2bc).bc \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

R.H.Sir

$$= \frac{-2bc}{a} \cdot \frac{1}{bc} \begin{vmatrix} 0 & bc & bc \\ ab & bc^2 + a^2b & bc^2 \\ ca & b^2c & ca^2 + b^2c \end{vmatrix}$$

$[c_2{}' = c_2 \times b, , c_3{}' = c_3 \times c]$

$$= \frac{-2bc}{a} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ ab & bc^2 + a^2b & bc^2 \\ ca & b^2c & ca^2 + b^2c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2bc}{a} \begin{vmatrix} 0 & 1-1 & 1 \\ ab & bc^2 + a^2b - bc^2 & bc^2 \\ ca & b^2c - ca^2 - b^2c & ca^2 + b^2c \end{vmatrix} [c_2{}' = c_2 - c_3]$$

$$= \frac{-2bc}{a} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ ab & a^2b & bc^2 \\ ca & -ca^2 & ca^2 + b^2c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2bc}{a} .1. \begin{vmatrix} ab & a^2b \\ ca & -ca^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2bc}{a}(-a^3bc - a^3bc)$$

$$= \frac{-2bc}{a}(-2a^3bc)$$

$$= -2bc(-2a^2bc)$$

$$= 4a^2b^2c^2$$

$$= R.H.S$$

*****12(i). প্রমাণ কর যে,**

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 - 1 & y^3 - 1 & z^3 - 1 \end{vmatrix} = (xyz - 1)(x - y)(y - z)(z - x).$$

(ii). যদি $B = \begin{bmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ l^3 - 1 & m^3 - 1 & n^3 - 1 \end{bmatrix}$ **হয়,তবে প্রমাণ কর যে,**

$|B| = (lmn - 1)(l - m)(m - n)(n - l)$. **(All-18)**

(iii). $x + y + z = 1$, $lx + my + nz = k$, $l^2x + m^2y + n^2z = k^2$ **সমীকরণ জোটটিকে** $AX = B$ **আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে,**

$\det(A) = (l - m)(m - n)(n - l)$ **(J-17)**

(iv). x, y, z **এর যে কোনো দুইটি সমান না হলে এবং**

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 + x^3 \\ y & y^2 & 1 + y^3 \\ z & z^2 & 1 + z^3 \end{vmatrix} = 0$$ **হলে, তবে প্রমাণ কর যে,** $(1 + xyz) = 0$.

(v).A = $\begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{bmatrix}$; প্রমাণ কর যে, |A| = pqr(p – q)(q – r)(r – p). **(B-21)**

(vi).A = $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 2x^3 + 1 & 2y^3 + 1 & 2z^3 + 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}$; প্রমাণ কর যে, det(A) = – (2xyz + 1) (x – y) (y – z) (z – x). **(J-21)**

(vii).সমীকরণ জোট: px + qy + rz = 5

$p^2x + q^2y + r^2z = 5$

$(p^3 - 1)x + (q^3 - 1)y + (r^3 - 1)z = -5$

; x, y ও z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক D হলে প্রমাণ কর যে, D = (pqr – 1) (p – q) (q – r) (r – p).**(S-21)**

(viii).B = $\begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 - 1 & q^3 - 1 & r^3 - 1 \end{bmatrix}$; দেখাও যে, |B| = (pqr – 1)(p – q)(q – r)(r – p).**(Ch-21)**

(ix).C= $\begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 - 1 & q^3 - 1 & r^3 - 1 \end{bmatrix}$; দেখাও যে, |C| = (pqr – 1)(p – q)(q – r)(r – p). **(Dj-21)**

(i). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 - 1 & y^3 - 1 & z^3 - 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}(xyz-1)$$

$$=(xyz-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$$

$$=(xyz-1)\begin{vmatrix}1-1 & 1-1 & 1\\ (x-y) & (y-z) & z\\ (x^2-y^2) & (y^2-z^2) & z^2\end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2,, c_2' = c_2 - c_3]$

$$=(xyz-1)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ (x-y) & (y-z) & z\\ (x+y)(x-y) & (y+z)\ (y-z) & z^2\end{vmatrix}$$

$$=(xyz-1).1.\begin{vmatrix}(x-y) & (y-z)\\ (x+y)(x-y) & (y+z)\ (y-z)\end{vmatrix}$$

$$=(xyz-1)(x-y)(y-z)\begin{vmatrix}1 & 1\\ (x+y) & (y+z)\end{vmatrix}$$

$=(xyz-1)(x-y)(y-z)\{(y+z)-(x+y)\}$

$=(xyz-1)(x-y)(y-z)(y+z-x-y)$

$=(xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$

$=R.H.S$

(ii). সমাধানঃ Same-(i)

(iii). সমাধানঃ দেওয়া আছে ,সমীকরণ জোটটি,

$x+y+z=1$

$lx+my+nz=k$

$l^2x+m^2y+n^2z=k^2$

$$\therefore \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ k\\ k^2\end{bmatrix}$$

$\therefore AX=B$ আকারে প্রকাশ করা হলো। যেখানে,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ k\\ k^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-1 & 1-1 & 1\\ (l-m) & (m-n) & n\\ (l^2-m^2) & (m^2-n^2) & n^2\end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2 \ \& \ c_2' = c_2 - c_3]$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ (l-m) & (m-n) & n\\ (l+m)(l-m) & (m+z)\ (m-n) & n^2\end{vmatrix}$$

$$=1.\begin{vmatrix}(l-m) & (m-n)\\ (l+m)(l-m) & (m+n)\ (m-n)\end{vmatrix}$$

$$=(l-m)(m-n)\begin{vmatrix}1 & 1\\ (l+m) & (m+n)\end{vmatrix}$$

$=(l-m)(m-n)\{(m+n)-(l+m)\}$

$=(l-m)(m-n)(m+n-l-m)$

$=(l-m)(m-n)(n-l)$

$=R.H.S$

(iv). সমাধানঃ দেওয়া আছে , $\begin{vmatrix}x & x^2 & 1+x^3\\ y & y^2 & 1+y^3\\ z & z^2 & 1+z^3\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ y & y^2 & 1\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ y & y^2 & y^3\\ z & z^2 & z^3\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ y & y^2 & 1\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix}+xyz\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ y & y^2 & 1\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix}-xyz\begin{vmatrix}x & 1 & x^2\\ y & 1 & y^2\\ z & 1 & z^2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ y & y^2 & 1\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix}+xyz\begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ y & y^2 & 1\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1+xyz)\begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ y & y^2 & 1\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1+xyz)\begin{vmatrix}(x-y) & (x^2-y^2) & 1-1\\ (y-z) & (y^2-z^2) & 1-1\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix}=0$$

R.H. Sir

$[r_1' = r_1 - r_2,, r_2' = r_2 - r_3]$

$$\Rightarrow (1+xyz)\begin{vmatrix} (x-y) & (x+y)(x-y) & 0 \\ (y-z) & (y+z)(y-z) & 0 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1+xyz)\begin{vmatrix} (x-y) & (x+y)(x-y) \\ (y-z) & (y+z)(y-z) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1+xyz)(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & (x+y) \\ 1 & (y+z) \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (1+xyz)(x-y)(y-z)\{(y+z)-(x+y)\} = 0$

$\Rightarrow (1+xyz)(x-y)(y-z)(y+z-x-y) = 0$

$\Rightarrow (1+xyz)(x-y)(y-z)(z-x) = 0$

$\therefore (1+xyz) = 0$ **(Showed**

$[\because (x-y)(y-z)(z-x) \neq 0]$

*****13(i). প্রমাণ কর যে,** $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

(ii). বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$$

(iii). বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{vmatrix} = 0$$ **(S-17)**

(iv). বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 2 & a & 6-a \\ 3 & b & 9-b \\ 9 & c & 27-c \end{vmatrix} = 0$

(Dj-19)

(v). বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x) \\ xy & yz & zx \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xyz.\begin{vmatrix} (x+y) & (y+z) & (z+x) \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix} = 0$$ **(S-19)**

(vi). বিস্তার না করে $\begin{vmatrix} y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \\ x+y & z & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান নির্ণয় কর।**(Dj-21)**

(vii). প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} x+y & 3(y+z) & z+x \\ 1 & 3 & 1 \\ z & 3x & y \end{vmatrix} = 0$**(M-21)**

(i). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & a+b+c & b+c \\ 2 & b+c+a & c+a \\ 2 & c+a+b & a+b \end{vmatrix} [c_2' = c_2 + c_3]$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$= 2(a+b+c) \times 0$

$= 0$

$= R.H.S$

(ii). সমাধানঃ $L.H.S = \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 \times a,, r_2' = r_2 \times b,, r_3' = r_3 \times c]$

$$= \frac{1}{abc}.abc.abc\begin{vmatrix} a & 1 & (b+c) \\ b & 1 & (c+a) \\ c & 1 & (a+b \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} a & 1 & (b+c) \\ b & 1 & (c+a) \\ c & 1 & (a+b \end{vmatrix} = M.H.S$$

আবার, $M.H.S = abc\begin{vmatrix} a & 1 & (b+c) \\ b & 1 & (c+a) \\ c & 1 & (a+b \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & (b+c) \\ b+c+a & 1 & (c+a) \\ c+a+b & 1 & (a+b \end{vmatrix} [c_1' = c_1 + c_3]$$

R.H.Sir

$$=abc(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & (b+c)\\ 1 & 1 & (c+a)\\ 1 & 1 & (a+b\end{vmatrix}$$
$=abc(a+b+c)\times 0$
$=0$
$=R.H.S$

(iii). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}x & -a & x+a\\ y & -b & y+b\\ z & -c & z+c\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}x & -a+x+a & x+a\\ y & -b+y+b & y+b\\ z & -c+z+c & z+c\end{vmatrix}[\because c_2'=c_2+c_3]$$

$$=\begin{vmatrix}x & x & x+a\\ y & y & y+b\\ z & z & z+c\end{vmatrix}$$
$=0$
$=R.H.S$

(iv). সমাধানঃ $L.H.S=\begin{vmatrix}2 & a & 6-a\\ 3 & b & 9-b\\ 9 & c & 27-c\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}2 & a+6-a & 6-a\\ 3 & b+9-b & 9-b\\ 9 & c+27-c & 27-c\end{vmatrix}[\because c_2'=c_2+c_3]$$

$$=\begin{vmatrix}2 & 6 & 6-a\\ 3 & 9 & 9-b\\ 9 & 27 & 27-c\end{vmatrix}$$

$$=3\times\begin{vmatrix}2 & 2 & 6-a\\ 3 & 3 & 9-b\\ 9 & 9 & 27-c\end{vmatrix}$$
$=3\times 0$
$=0$
$=R.H.S$

(v). সমাধানঃ

$$L.H.S=\begin{vmatrix}xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x)\\ xy & yz & zx\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix}xyz(x+y) & xyz(y+z) & yzx(z+x)\\ xyz & xyz & yzx\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$[c_1'=c_1\times z,,c_2'=c_2\times x,,c_3'=c_3\times y]$

$$=\frac{1}{xyz}.xyz.xyz.\begin{vmatrix}(x+y) & (y+z) & (z+x)\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$$=xyz.\begin{vmatrix}(x+y) & (y+z) & (z+x)\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}=M.H.S$$

$$=xyz.\begin{vmatrix}x+y+z & y+z+x & z+x+y\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}[r_1'=r_1+r_3]$$

$$=xyz(x+y+z).\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ z & x & y\end{vmatrix}[c_1'=c_1+c_3]$$

$=xyz(x+y+z)\times 0$
$=0$
$=R.H.S$

*****14(i).সমাধান কর :** $\begin{vmatrix}3+x & 4 & 2\\ 4 & 2+x & 3\\ 2 & 3 & 4+x\end{vmatrix}=0$ **(J-19)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে , $\begin{vmatrix}3+x & 4 & 2\\ 4 & 2+x & 3\\ 2 & 3 & 4+x\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}3+x+4+2 & 4+2+x+3 & 2+3+4+x\\ 4 & 2+x & 3\\ 2 & 3 & 4+x\end{vmatrix}=0$$

$[r_1'=r_1+r_2+r_3]$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}9+x & 9+x & 9+x\\ 4 & 2+x & 3\\ 2 & 3 & 4+x\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow(9+x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2+x & 3\\ 2 & 3 & 4+x\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow(9+x)\begin{vmatrix}1-1 & 1-1 & 1\\ 4-2-x & 2+x-3 & 3\\ 2-3 & 3-4-x & 4+x\end{vmatrix}=0$$

$[c_1'=c_1-c_2,c_2'=c_2-c_3]$

$$\Rightarrow(9+x)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2-x & x-1 & 3\\ -1 & -1-x & 4+x\end{vmatrix}=0$$

R.H. Sir

$\Rightarrow (9+x).1.\begin{vmatrix} 2-x & x-1 \\ -1 & -1-x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (9+x)\begin{vmatrix} 2-x & x-1 \\ -1 & -1-x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (9+x)\{(-2-2x+x+x^2)-(-x+1)\}=0$

$\Rightarrow (9+x)\{(-2-x+x^2)-(-x+1)\}=0$

$\Rightarrow (9+x)(-2-x+x^2+x-1)=0$

$\Rightarrow (9+x)(x^2-3)=0$

$\therefore$ **হয় ,** $(9+x)=0$

$\therefore x=-9$

অথবা, $(x^2-3)=0$

$\Rightarrow x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান,** $x=-9,\pm\sqrt{3}$

*****15(i). k এর মান কত হলে** $\begin{bmatrix} 5+k & -2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ **একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে?**

(iii). যদি $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর। (C-17)**

(iv). যদি $\begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়, তবে p এর মান নির্ণয় কর। (B-17)**

(v). $\begin{pmatrix} -a & 6 \\ 2 & -a+1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান বের কর।**(B-21)**

(vi). $\begin{bmatrix} x^2 & x \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর।**(Dj-21)**

(vii). $\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর।**(S-21)**

(viii). যদি $\begin{bmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়,তবে x এর মান নির্ণয় কর। (All-18)**

(ix). k-এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} k+3 & -1 \\ k & k+2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে?**(D-21)**

(i). সমাধানঃ ধরি, $A=\begin{bmatrix} 5+k & -2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$

যদি A একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে নির্ণায়কের মান $|A|=0$ হবে।

শর্তমতে, $\begin{vmatrix} 5+k & -2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow -40-8k-8=0$

$\Rightarrow -48-8k=0$

$\Rightarrow -8k=48$

$\therefore k=\frac{48}{-8}$

$\therefore k=-6$

$\therefore$ **k এর মান -6 হলে ম্যাট্রিক্সটি একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে।**

(viii). সমাধানঃ ধরি, $A=\begin{bmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{bmatrix}$

যদি A একটি ব্যতিক্রম ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে নির্ণায়কের মান $|A|=0$ হবে।

শর্তমতে, $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix}$

$=2x-2x$

$=0$

$\therefore$ **x এর সকল মানের জন্য ম্যাট্রিক্সটি একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে।**

(ix). সমাধানঃ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের সংশ্লিষ্ট নির্ণায়ক শূন্য।

$\therefore \begin{vmatrix} k+3 & -1 \\ k & k+2 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow (k+3)(k+2)+k=0$

$\Rightarrow k^2+3k+2k+6+k=0$

$\Rightarrow k^2+6k+6=0$

$\therefore k=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times6}}{2\times1}$

$=\frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{2}$

$=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{2}$

$=\frac{-6\pm\sqrt{4\times3}}{2}$

$=\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{2}$

$\therefore k=-3\pm\sqrt{3}$

****16.** A_1, B_1, C_1 **যথাক্রমে** a_1, b_1, c_1 **এর সহগুনক হলে,** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **থেকে প্রমাণ কর যে,**

$a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1=0$

সমাধানঃ এখানে,

R.H.Sir

a_1 এর সহগুনক $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= b_2 c_3 - b_3 c_2$

$\therefore b_1$ এর সহগুনক $B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= -(a_2 c_3 - a_3 c_2)$

$\therefore c_1$ এর সহগুনক $C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$= a_2 b_3 - a_3 b_2$

$\therefore L.H.S = a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1$

$= a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_3(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_3(a_2 b_3 - a_3 b_2)$

$= a_3 b_2 c_3 - a_3 b_3 c_2 - a_2 b_3 c_3 + a_3 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_3 - a_3 b_2 c_3$

$= 0$

Shortcut Technic-04: যদি $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **হয়,**

তবে ($A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$ **) নির্ণয়:** $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

****17(i). যদি** $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে দেখাও যে,**

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$

(ii). যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে দেখাও যে,** $AA^{-1} = I_2$

(iii). যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **হয়,**

তবে দেখাও যে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ এবং $(A^{-1})^{-1} = A$

(iv). $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} B = I$ **হলে B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে , $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= -3 - 10$

$= -13$

$\therefore |A| \neq 0$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ **এর সহগুনক গুলো হলো,**

$a_{11} = (-1)^{1+1}.3 = (-1)^2.3 = 1.3 = 3$

$a_{12} = (-1)^{1+2}.(-2) = (-1)^3.(-2) = (-1).(-2) = 2$

$a_{21} = (-1)^{2+1}.(-5) = (-1)^3.(-5) = (-1).(-5) = 5$

$a_{22} = (-1)^{2+2}.(-1) = (-1)^4.(-1) = 1.(-1) = -1$

$\therefore$ $|A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore AdjA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

আমরা জানি, $A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$

$= \frac{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}{-13}$

$= -\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে , $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5$

$\therefore |A| \neq 0$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ **এর সহগুনক গুলো হলো,**

$a_{11} = 10, a_{12} = -3, a_{21} = -5, a_{22} = 2$

$\therefore$ $|A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,** $A = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore AdjA = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

R.H.Sir

আমরা জানি, $A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}$

$=\frac{\begin{bmatrix}10 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}}{5}$

$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}10 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{10}{5} & \frac{-5}{5}\\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$

$\therefore L.H.S=AA^{-1}$

$=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2.2+5.(\frac{-3}{5}) & 2.(-1)+5.\frac{2}{5}\\ 3.2+10.(\frac{-3}{5}) & 3.(-1)+10.\frac{2}{5}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4-3 & -2+2\\ 6+2.(-3) & -3+2.2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6-6 & -3+4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$=I_2$

$=R.H.S$

Shortcut Technic-05: $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}_{3\times 3}$

স্কেলার ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান নির্ণয়: a^3

Shortcut Technic-06: যদি $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$

হয়, তবে A^2 নির্ণয়: $A^2=\begin{bmatrix}a^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & c^2\end{bmatrix}$

Shortcut Technic-07: যদি $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$

হয়, তবে A^{-1} নির্ণয়: $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{bmatrix}$

*****18.** নীচের ম্যাট্রিক্স গুলোর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

(i). $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$ **(D-15)**

(ii). $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$ **(D-17)**

(iii) $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ হলে একটি ম্যাট্রিক্স **B** নির্ণয় কর যেন $AB=BA=I_3$ হয়। **(D-16)**

(iv). যদি $\begin{matrix}x+y+z=1\\ lx+my+nz=k\\ l^2x+m^2y+n^2z=k^2\end{matrix}$ হয়, তবে **x, y, z** এর সহগগুলি নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স **A** এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। যেখানে, $l=1, m=2, n=-1$ **(J-17)**

(v). $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix}$ **(S-17)**

(vi). $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ **(Ch-17)**

(vii). $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ **(C-17)**

(viii). $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ **(R-17)**

R.H.Sir

(ix). $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ **(Dj-17)**

(x). যদি

$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\6 & 4 & -2\\5 & 2 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 2\\-4 & -3 & 2\\-1 & -4 & 6\end{bmatrix}$ **এবং**

$A=B+C$ **হয়, তবে** A^{-1} **নির্ণয় কর। (S-17)**

(xi). $M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 2 & 0\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **(All-18)**

(xii). $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & -2 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ **(All-18)**

(xiii). $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 4\\3 & 2 & -5\end{bmatrix}$ **(D-19)**

(xiv). যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\4 & 1 & 3\\2 & 3 & 3\end{bmatrix}$ **এবং** $x=-1$ **হয়, তবে** A^{-1} **নির্ণয় কর। (J-19)**

(xv). যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 8 & 2\\4 & 9 & -1\end{bmatrix}$ **; বিপরীতকরণ যোগ্যতা যাচাইপূর্বক** A^{-1} **নির্ণয় কর। (C-19)**

(xv). $\begin{matrix}x-y+z=2\\2x+z=5\\x+2y-3z=-4\end{matrix}$ **প্রদত্ত সমীকরণ জোটের চলক সমূহের সহগগুলি নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। (B-19)**

(xvi). $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\\mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{-2}\\\mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-6}\end{bmatrix}$**,** $\mathbf{B}=\mathbf{A^{-1}}$**;** B নির্ণয় কর।**(M-21)**

(xvii).সমাধান পদ্ধতিতে $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\1 & 3 & 2\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ **বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।**

(xviii). অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\1 & 3 & 2\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ **বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।**

(xix). $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4}\\\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\\mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-5}\end{bmatrix}$**,** প্রমান কর যে, $A^{-1}.A=I_3$.**(B-21)**

(xx). $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\1 & 3 & 1\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}$; এমন ম্যাট্রিক্স C নির্ণয় কর যেন, $BC=CB=I_3$ হয়।**(J-21)**

(xxi). $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\7 & 2 & 5\\-1 & 8 & 9\end{bmatrix}$; B^{-1} নির্ণয় কর (যদি বিদ্যমান থাকে)।**(S-21)**

(xxii). $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\\mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$; C^{-1} নির্ণয় কর।**(Ch-21)**

(xxiii). $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4}\end{bmatrix}$; C^{-1} নির্ণয় কর।**(C-21)**

(xxiv). $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{2}\\\mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$; $AB=BA=I_3$ হলে, B নির্ণয় কর। যেখানে, B একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।**(Dj-21)**

(xxv). $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1+m} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\\mathbf{2} & \mathbf{3+m} & \mathbf{1}\\\mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2+m}\end{bmatrix}$**;** $m=0$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর।**(R-21)**

(xxvi). $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\\mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{-2}\\\mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-6}\end{bmatrix}$**,** $\mathbf{B}=\mathbf{A^{-1}}$; B নির্ণয় কর।**(M-21)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে , $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

R.H. Sir.

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0(2-3) - 1(1-9) + 2(1-6)$

$= 0 - 1(-8) + 2(-5)$

$= 8 - 10$

$= -2$

$\therefore |A| \neq 0$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ **এর সহগুনক গুলো হলো,**

$a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2(2-3) = 1.(-1) = -1$

$a_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3(1-9) = -1(-8) = 8$

$a_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(1-6) = 1.(-5) = -5$

$a_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3(1-2) = (-1).(-1) = 1$

$a_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(0-6) = 1.(-6) = -6$

$a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(0-3) = (-1).(-3) = 3$

$a_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4(3-4) = 1.(-1) = -1$

$a_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5(0-2) = -1.(-2) = 2$

$a_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6(0-1) = 1.(-1) = -1$

$\therefore$ $|A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,** $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore AdjA = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

আমরা জানি, $A^{-1} = \dfrac{AdjA}{|A|}$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}}{-2}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ (Ans).}$$

(ii) সমাধানঃ দেওয়া আছে , $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 1(0-9) - 4(8-6) + 2(12-0)$

$= 1(-9) - 4.2 + 2.12$

$= -9 - 8 + 24$

$= -17 + 24$

$= 7$

$\therefore |A| \neq 0$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ **এর সহগুনকগুলো হলো,**

$a_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (0-9) = -9$

$a_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$

R.H. Sir

$$a_{13}=\begin{vmatrix}4 & 0\\2 & 3\end{vmatrix}=(12-0)=12$$

$$a_{21}=-\begin{vmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{vmatrix}=-(8-6)=-2$$

$$a_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{vmatrix}=(2-4)=-2$$

$$a_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{vmatrix}=-(3-8)=-(-5)=5$$

$$a_{31}=\begin{vmatrix}4 & 2\\0 & 3\end{vmatrix}=(12-0)=12$$

$$a_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{vmatrix}=-(3-8)=-(-5)=5$$

$$a_{33}=\begin{vmatrix}1 & 4\\4 & 0\end{vmatrix}=(0-16)=-16$$

$\therefore$ $|A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,**

$$A=\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}$$

$$\therefore AdjA=\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}$$

আমরা জানি, $A^{-1}=\dfrac{AdjA}{|A|}$

$$=\frac{\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}}{7}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}$$

(iii). সমাধানঃ শর্তমতে, $AB=BA=I_3$

$\therefore$ **B = A^{-1}**

এখন, দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\1 & 3 & 2\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix}1 & 6 & 0\\1 & 3 & 2\\0 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 0\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{vmatrix}$$

$$=1(0-4)-6(0-0)+0$$
$$=1(-4)-6.0+0$$
$$=-4-0+0$$
$$=-4$$
$$\therefore |A|\neq 0$$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ **এর সহগুনক গুলো হলো,**

$$a_{11}=\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 0\end{vmatrix}=(0-4)=-4$$

$$a_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{vmatrix}=-(0-0)=0$$

$$a_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{vmatrix}=(2-0)=2$$

$$a_{21}=-\begin{vmatrix}6 & 0\\2 & 0\end{vmatrix}=-(0-0)=0$$

$$a_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}=(0-0)=0$$

$$a_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 6\\0 & 2\end{vmatrix}=-(2-0)=-2$$

$$a_{31}=\begin{vmatrix}6 & 0\\3 & 2\end{vmatrix}=(12-0)=12$$

$$a_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{vmatrix}=-(2-0)=-2$$

$$a_{33}=\begin{vmatrix}1 & 6\\1 & 3\end{vmatrix}=(3-6)=-3$$

$\therefore$ $|A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,** $A=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 2\\0 & 0 & -2\\12 & -2 & -3\end{bmatrix}$

R.H.Sir

$$\therefore AdjA = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 12 & -2 & -3 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

আমরা জানি, $A^{-1} = \dfrac{AdjA}{|A|}$

$$= \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

(iv). সমাধানঃ দেওয়া আছে , $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix}$

$$\therefore A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1^2 & 2^2 & (-1)^2 \end{vmatrix}$$

যেখানে, $l = 1, m = 2, n = -1$

$$\therefore A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 1(2+4) - 1(1+1) + 1(4-2)$

$= 1.6 - 1.2 + 1.2$

$= 6 - 2 + 2$

$= 6$

$\therefore |A| \neq 0$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ **এর সহগুনক গুলো হলো,**

$a_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (2+4) = 6$

$a_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$

$a_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4-2) = 2$

$a_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = -(-3) = 3$

$a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-1) = 0$

$a_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$

$a_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1-2) = -3$

$a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = -(-2) = 2$

$a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-1) = 1$

$\therefore |A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,** $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore AdjA = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

আমরা জানি, $A^{-1} = \dfrac{AdjA}{|A|}$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

*****19. ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর।**

(i).

$2x + y - 2z = 10$

$3x + 2y + 2z = 1$

$5x + 4y + 3z = 4$

(ii).

R.H. Sir

$x+y+z=6$

$x-2y+2z=3$ **হলে, সমীকরণ জোটটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের**

$2x+y-z=1$

সাহায্যে সমাধান কর। (S-19)

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে, প্রদত্ত সমীকরণ জোট,

$2x+y-2z=10$

$3x+2y+2z=1$

$5x+4y+3z=4$

ম্যাট্রিক্স আকারে লিখে পাই,

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\3 & 2 & 2\\5 & 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\1\\4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AX=B$

$\therefore X=A^{-1}B............(i)$

যেখানে, $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\3 & 2 & 2\\5 & 4 & 3\end{bmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}10\\1\\4\end{pmatrix}$

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\3 & 2 & 2\\5 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

$=2\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 3\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{vmatrix}$

$=2(6-8)-1(9-10)-2(12-10)$

$=2(-2)-1(-1)-2.2$

$=-4+1-4$

$=-7$

$\therefore |A|\neq 0$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ এর সহগুনক গুলো হলো,

$a_{11}=\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 3\end{vmatrix}=(6-8)=-2$

$a_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 3\end{vmatrix}=-(9-10)=-(-1)=1$

$a_{13}=\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{vmatrix}=(12-10)=2$

$a_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\4 & 3\end{vmatrix}=-(3+8)=-11$

$a_{22}=\begin{vmatrix}2 & -2\\5 & 3\end{vmatrix}=(6+10)=16$

$a_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 4\end{vmatrix}=-(8-5)=-3$

$a_{31}=\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 2\end{vmatrix}=(2+4)=6$

$a_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -2\\3 & 2\end{vmatrix}=-(4+6)=-10$

$a_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}=(4-3)=1$

$\therefore |A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,** $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\-11 & 16 & -3\\6 & -10 & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore AdjA=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\-11 & 16 & -3\\6 & -10 & 1\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -11 & 6\\1 & 16 & -10\\2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

আমরা জানি, $A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}$

$$=\frac{\begin{bmatrix}-2 & -11 & 6\\1 & 16 & -10\\2 & -3 & 1\end{bmatrix}}{-7}$$

$$=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-2 & -11 & 6\\1 & 16 & -10\\2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

(i) নং হতে পাই,

$$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-2 & -11 & 6\\1 & 16 & -10\\2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\1\\4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-20-11+24\\10+16-40\\20-3+4\end{bmatrix}$$

R.H. Sir

$$=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-7\\-14\\21\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-7}{-7}\\\frac{-14}{-7}\\\frac{21}{-7}\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$$

নির্ণেয় সমাধান, $x=1, y=2, z=-3$

*****20(i).** $A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -5\\-4 & 7\end{bmatrix}$ হলে **A** ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

(ii). $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & \frac{1}{7}\\\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}$ হলে A^2+2A নির্ণয় কর।

(iii). $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}, AB=\begin{bmatrix}10 & 17\\4 & 7\end{bmatrix}$ হলে **B** ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

(i). সমাধানঃ মনে করি, $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স যেন $A^{-1}A=I$ হয়।

$$\therefore \begin{bmatrix}3 & -5\\-4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}3a-5c & 3b-5d\\-4a+7c & -4b+7d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

শর্তমতে,

$3a-5c=1$.................(i)

$-4a+7c=0$...........(ii)

$3b-5d=0$...............(iii)

$-4b+7d=1$..........(iv)

সমীকরণ $(i)\times4+(ii)\times3$ **হতে পাই,**

$$\begin{aligned}12a-20c&=4\\-12a+21c&=0\\\hline \therefore c&=4\end{aligned}$$

C এর (ii) মান নং বসিয়ে পাই, $-4a+28=0$

$\Rightarrow -4a=-28$

$\Rightarrow a=\frac{-28}{-4}$

$\therefore a=7$

সমীকরণ $(iii)\times4+(iv)\times3$ **হতে পাই,**

$$\begin{aligned}12b-20d&=0\\-12b+21d&=3\\\hline \therefore d&=3\end{aligned}$$

d এর (iii) মান নং বসিয়ে পাই, $3b-15=0$

$\Rightarrow 3b=15$

$\Rightarrow b=\frac{15}{3}$

$\therefore b=5$

সুতরাং নির্ণেয় ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix}7 & 5\\4 & 3\end{bmatrix}$

(ii). সমাধানঃ Same (i) এর নিয়মে A এর মান বের করে A^2+2A**তে বসাইতে হবে।**

(iii). সমাধানঃ মনে করি, $B=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

শর্তমতে, $AB=\begin{bmatrix}10 & 17\\4 & 7\end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 17\\4 & 7\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}4a+3c & 4b+3d\\2a+c & 2b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 17\\4 & 7\end{bmatrix}$$

এরপর Same (i) এর নিয়মে A এর মান বের করতে হবে।

*****21. নির্ণায়কের সাহায্যে (ক্রেমারের নিয়মে) সমাধান কর।**

(i).

$4x+2y=6$
$3x+5y=1$ **(B-17)**

(ii). $x+3y+2=0, 2x+y+3=0$ **(R-17)**

(i). সমাধানঃ এখানে, x,y এর সহগগুলো নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$D=\begin{vmatrix}4 & 2\\3 & 5\end{vmatrix}$$

$=20-6$

$=14$

$$\therefore D_x=\begin{vmatrix}6 & 2\\1 & 5\end{vmatrix}$$

$=30-2$

$=28$

$$\therefore D_y=\begin{vmatrix}4 & 6\\3 & 1\end{vmatrix}$$

$=4-18$

$=-14$

$\therefore x=\frac{D_x}{D}=\frac{28}{14}=2$ এবং

R.H. Sir

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-14}{14}=-1$$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান,** $x=2$ ও $y=-1$

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, প্রদত্ত সমীকরণ জোট,

$x+3y+2=0, 2x+y+3=0$

$\therefore x+3y=-2, 2x+y=-3$

এখন, আগের নিয়ম।

*****22. নির্ণায়কের সাহায্যে (ক্রেমারের নিয়মে) সমাধান কর।**

(i).

$2x+y-2z=10$

$3x+2y+2z=1$

$5x+4y+3z=4$

(ii).

$2x+y+3z=4$

$x+2z=0$ **(D-19)**

$3x+4y-5z=2$

(iii).

$2x+3y-5z=7$

$x-4y+z=4$ **(Dj-19)**

$\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}y-\frac{2}{5}z=1$

(iv).

$x-y+z=2$

$2x+z=5$ **(B-19)**

$x+2y-3z=-4$

(v).

$\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{5}{7}z=1$

$\frac{1}{4}x-y+\frac{1}{4}z=1$ **(S-17)**

$\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}y-\frac{2}{5}z=1$

(vi). $A=\begin{bmatrix}1&4&2\\4&0&3\\2&3&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$

এবং $A\times B=C$ **হলে ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। (D-17)**

(vii). $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&8&2\\4&9&-1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1\\28\\14\end{bmatrix}$

এবং $AX=B$ **হলে ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। (C-19)**

(viii). $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\3&0&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ **এবং**

$BC=D$ **হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। (R-19)**

(ix). $M=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&2&0\\3&0&1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ **এবং**

$M^tX=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$ **হলে নির্ণায়কের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। (All-18)**

(x). $M=[x+2y+3z \quad 2x+y+4z \quad 3x+2y+z]$, $N=[-1 \quad 2 \quad 3]$ **এবং** $M=N$ **হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। (Ch-19)**

(xi). $\frac{x}{5}+\frac{3y}{10}+\frac{z}{10}=\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=\frac{3y}{7}+\frac{4z}{7}=1$ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর।**(D-21)**

(xii). $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&2&-1\\4&2&-3\\1&4&2\end{bmatrix}, \mathbf{C}=\begin{bmatrix}5\\1\\6\end{bmatrix}$ **এবং** $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$**;**

ক্রেমারের সূত্র ব্যবহার করে BX = C সমীকরণ জোটটি সমাধান কর|**(B-21)**

(xiii). $A=\begin{bmatrix}4&1&5\\-2&-1&-3\\3&-4&-9\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$;

ক্রেমারের সূত্রের সাহায্যে AX = B সমীকরণ জোট সমাধান কর।**(J-21)**

(xiv).সমীকরণ জোটঃ

$px+qy+rz=5$

$p^2x+q^2y+r^2z=5$

$(p^3-1)x+(q^3-1)y+(r^3-1)z=-5$;

p = 1, q = 2, r = 3 হলে ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর।**(S-21)**

(xv). $\mathbf{x+3y+2z=5}$

$\mathbf{2x+y+3z=1}$

$\mathbf{3x+2y+z=4}$

ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটের সমাধান কর।**(Ch-21)**

R.H.Sir

$$\text{(xvi).}\ \left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 11 \end{array}\right\}$$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর।**(C-21)**

(xvii). $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

AX = B হলে নির্ণায়কের সাহায্যে X নির্ণয় কর।**(Dj-21)**

(xviii). $A = \begin{bmatrix} 1+m & 2 & 3 \\ 2 & 3+m & 1 \\ 3 & 1 & 2+m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$; AB = C হলে নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর, যখন m = 1. **(R-21)**

(xix). $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, B = A^{-1}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$; AX = C হলে x, y, z নির্ণয় কর।**(M-21)**

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে, প্রদত্ত সমীকরণ জোট,

$2x + y - 2z = 10$

$3x + 2y + 2z = 1$

$5x + 4y + 3z = 4$

এখানে, x,y,z এর সহগগুলো নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(6-8) - 1(9-10) - 2(12-10)$

$= 2(-2) - 1(-1) - 2.2$

$= -4 + 1 - 4$

$= -7$

$$\therefore D_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 10\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$

$= 10(6-8) - 1(3-8) - 2(4-8)$

$= 10(-2) - 1(-5) - 2(-4)$

$= -20 + 5 + 8$

$= -7$

$$\therefore D_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(3-8) - 10(9-10) - 2(12-5)$

$= 2(-5) - 10(-1) - 2.7$

$= -10 + 10 - 14$

$= -14$

$$\therefore D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(8-4) - 1(12-5) + 10(12-10)$

$= 2.4 - 1.7 + 10.2$

$= 8 - 7 + 20$

$= 21$

$\therefore\ x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-7}{-7} = 1,$

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-14}{-7} = 2$

এবং $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{21}{-7} = -3$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান,** $x = 1, y = 2, z = -3$,

(iii). সমাধানঃ দেওয়া আছে, প্রদত্ত সমীকরণ জোট,

$2x + 3y - 5z = 7$

$x - 4y + z = 4$

$\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z = 1$

$2x + 3y - 5z = 7$

বা, $x - 4y + z = 4$

$3x - y - 2z = 5$

(v). সমাধানঃ দেওয়া আছে, প্রদত্ত সমীকরণ জোট,

$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = 1$

$\frac{1}{4}x - y + \frac{1}{4}z = 1$

$\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z = 1$

R.H.Sir

$$2x+3y-5z=7$$
বা, $x-4y+z=4$
$$3x-y-2z=5$$

(vi). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$$

শর্তমতে, $AB=C$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$$

$$x+4y+2z=2$$
$$4x+0.y+3z=5$$
$$2x+3y+2z=4$$

এখানে, x,y,z এর সহগগুলো নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$D=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{vmatrix}$$
$$=1\begin{vmatrix}0 & 3\\3 & 2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}4 & 3\\2 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4 & 0\\2 & 3\end{vmatrix}$$
$$=1(0-9)-4(8-6)+2(12-0)$$
$$=1(-9)-4.2+2.12$$
$$=-9-8+24$$
$$=-17+24$$
$$=7$$

$$\therefore D_x=\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\5 & 0 & 3\\4 & 3 & 2\end{vmatrix}$$
$$=2\begin{vmatrix}0 & 3\\3 & 2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5 & 3\\4 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}5 & 0\\4 & 3\end{vmatrix}$$
$$=2(0-9)-4(10-12)+2(15-0)$$
$$=2(-9)-4(-2)+2(15)$$
$$=-18+8+30$$
$$=20$$

$$\therefore D_y=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\4 & 5 & 3\\2 & 4 & 2\end{vmatrix}$$
$$=1\begin{vmatrix}5 & 3\\4 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4 & 3\\2 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4 & 5\\2 & 4\end{vmatrix}$$
$$=1(10-12)-2(8-6)+2(16-10)$$
$$=1(-2)-2.2+2.6$$
$$=-2-4+12$$
$$=6$$

$$\therefore D_z=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 5\\2 & 3 & 4\end{vmatrix}$$
$$=1\begin{vmatrix}0 & 5\\3 & 4\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}4 & 5\\2 & 4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4 & 0\\2 & 3\end{vmatrix}$$
$$=1(0-15)-4(16-10)+2(12-0)$$
$$=1(-15)-4.6+2.12$$
$$=-15-24+24$$
$$=-15$$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান,** $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{20}{7}$,

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{6}{7}$$

এবং $z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{-15}{7}$

(vii). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 8 & 2\\4 & 9 & -1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1\\28\\14\end{bmatrix}$$

শর্তমতে, $AX=B$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 8 & 2\\4 & 9 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\28\\14\end{bmatrix}$$

$$x+2y-z=-1$$
$$3x+8y+2z=28$$
$$4x+9y-z=14$$

এখানে, x,y,z এর সহগগুলো নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$D=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 8 & 2\\4 & 9 & -1\end{bmatrix}$$ এরপর আগের নিয়ম।

(ix). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 2 & 0\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

শর্তমতে, $M^tX=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 2 & 0\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}^t\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

R.H.Sir

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$2x - y + 3z = -1$

$x + 2y + 0.z = 0$

$x + 0.y + z = 2$

এখানে, x,y,z এর সহগগুলো নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

এরপর আগের নিয়ম।

(x). সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$M = [x + 2y + 3z \quad 2x + y + 4z \quad 3x + 2y + z],$

$N = [-1 \quad 2 \quad 3]$

শর্তমতে, $M = N$

$\therefore [x + 2y + 3z \ \ 2x + y + 4z \ \ 3x + 2y + z] = [-1 \quad 2 \quad 3]$

$x + 2y + 3z = -1$

$2x + y + 4z = 2$

$3x + 2y + z = 3$

এরপর আগের নিয়ম।

R.H Sir